Klub 44 F

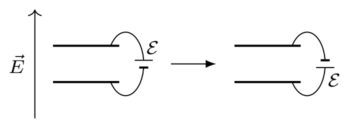
Termin nadsyłania rozwiązań: 31 XII 2024

Zadania z fizyki nr 784, 785

Redaguje Elżbieta ZAWISTOWSKA

784. Szklany pryzmat o małym kącie łamiącym φ umieszczono w pewnej odległości od cienkiej soczewki skupiającej o ogniskowej f tak, że jedna z powierzchni pryzmatu jest prostopadła do osi optycznej soczewki. Po drugiej stronie soczewki, w jej ognisku znajduje się punktowe źródło światła. Promienie odbite od pryzmatu po załamaniu w soczewce dają dwa obrazy źródła światła oddalone od siebie o d. Znaleźć współczynnik załamania szkła, z którego wykonano pryzmat.

785. Kondensator płaski, którego powierzchnia okładek jest dużo większa od odległości między nimi, podłączony jest do źródła o sile elektromotorycznej $\mathcal{E}$ i umieszczony w jednorodnym polu elektrycznym o natężeniu E. Linie pola są prostopadłe do powierzchni okładek kondensatora (rys. 1). Jaką pracę trzeba wykonać, aby obrócić ten kondensator o kąt π wokół osi prostopadłej do wektora $\vec{E}$?



Rys. 1

Rozwiązania zadań z numeru 6/2024

Przypominamy treść zadań:

780. Mała piłeczka spadająca z wysokości h na twardą podłogę odskakuje na wysokość $h/3$. Na niciach o długościach l zawieszono stykające się ze sobą dwie takie piłeczki. Jedną z nich odchylono od pionu o kąt $\pi/2$ i puszczono swobodnie. O jakie kąty odchylą się nici po zderzeniu piłeczek?

781. W odległości R od nieruchomego ładunku $Q>0$ znajduje się mała kulka o masie m, naładowana ładunkiem $-Q$. Układ znajduje się w jednorodnym polu magnetycznym, którego linie pola są prostopadłe do odcinka łączącego ładunki. Po oswobodzeniu kulka zaczyna się poruszać, a minimalna odległość, na jaką zbliża się do nieruchomego ładunku, wynosi $R/2$. Znaleźć wartość indukcji pola magnetycznego.

Czołówka ligi zadaniowej **Klub 44 F** po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań 774 ($WT = 3{,}88$), 775 ($WT = 2{,}32$) z numeru 3/2024

Jacek Konieczny	Poznań	40,87
Konrad Kapcia	Poznań	2–39,58
Paweł Perkowski	Ożarów Maz.	5–37,86
Andrzej Nowogrodzki	Chocianów	3–23,69
Tomasz Wietecha	Tarnów	17–22,85
Jan Zambrzycki	Białystok	4–22,38

780. Tuż przed zderzeniem prędkość nadlatującej piłeczki wynosi $v_1=\sqrt{2gl}$, druga piłeczka ma prędkość $v_2=0$. Środek masy układu porusza się z prędkością $V=v_1/2$, prędkość względna to $v=v_1$, a prędkości w układzie laboratoryjnym możemy zapisać jako:

$$(*)\qquad v_1 = V + v/2, \qquad v_2 = V - v/2.$$

W układzie środka masy $V=0$, energia układu $E=\mu v^2/2$, gdzie $\mu=m/2$, a m jest masą piłeczki. Zderzenie w tym układzie zachodzi jak zderzenie piłeczki o masie zredukowanej μ i prędkości v z twardą ścianką. Zgodnie z treścią zadania po odbiciu unosi ona 1/3 energii początkowej, a jej prędkość, czyli prędkość względna układu, zmienia znak na przeciwny i maleje $\sqrt{3}$ razy:

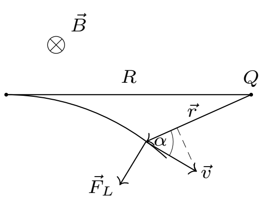
$$v' = -v/\sqrt{3}, \qquad v' = \sqrt{2gl/3}.$$

Wracając do układu laboratoryjnego, zgodnie z $(*)$ otrzymujemy:

$$v_1' = V + v'/2 = v_1/2 - v/(2\sqrt{3}) = \sqrt{gl/2}(1-1/\sqrt{3}),$$
$$v_2' = V - v'/2 = \sqrt{gl/2}(1+1/\sqrt{3}).$$

Szukane kąty odchylenia wynoszą:

$$\alpha_{1,2} = \arccos\left(1 - \frac{(v_{1,2}')^2}{2gl}\right) = \arccos\left(\frac{2}{3} \pm \frac{1}{2\sqrt{3}}\right).$$



Rys. 2

781. Zmiana energii kinetycznej kulki równa jest pracy siły elektrostatycznej:

$$mV^2/2 = kQ^2\left(2/R - 1/R\right),$$

gdzie V jest prędkością kulki w minimalnej odległości od nieruchomego ładunku, stąd

$$(\dagger)\qquad V = Q\sqrt{\frac{2k}{mR}}.$$

Moment siły magnetycznej względem punktu, w którym znajduje się nieruchomy ładunek w chwili, gdy odległość między ładunkami wynosi r (rys. 2) dany jest wzorem

$$\vec{M} = \vec{r}\times\vec{F}_L, \qquad M = rQB(v\cos\alpha).$$

Uwzględniając, że $v\cos\alpha = v_r = -\frac{dr}{dt}$, możemy napisać równanie ruchu cząstki:

$$M = -QBr\frac{dr}{dt} = \frac{dJ}{dt},$$

gdzie J jest momentem pędu cząstki. Jego zmiana od chwili początkowej do chwili, gdy odległość między ładunkami jest minimalna, wynosi

$$\Delta J = \frac{mVR}{2} = -QB\int_R^{R/2} r\,dr = 3QBR^2/8.$$

Uwzględniając $(\dagger)$, otrzymujemy wartość wektora indukcji pola magnetycznego:

$$B = \sqrt{\frac{32km}{9R^3}}.$$

Klub 44 M

Termin nadsyłania rozwiązań: 31 XII 2024

Zadania z matematyki nr 887, 888

Redaguje Marcin E. KUCZMA

887. Znaleźć najmniejszą liczbę rzeczywistą A, dla której istnieją liczby zespolone u, v, w oraz liczba rzeczywista B takie, że $|u| = |v| = |w| = 1 = uvw$, zaś $u + v + w = A + Bi$.

888. Znaleźć wszystkie trójki liczb całkowitych $x, y, z \geqslant 0$, spełniające równanie $7^x + 2^{x+y} = z^2$.

Zadanie 888 zostało opracowane na podstawie propozycji, którą przysłał pan Witold Bednarek z Łodzi.

Rozwiązania zadań z numeru 6/2024

Przypominamy treść zadań:

883. Znaleźć wszystkie funkcje $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ spełniające równanie

$$f(x^2 + y^2) = f(x^2) + f(xy) + f(y^2) \quad \text{dla } x, y \in \mathbb{R}.$$

884. Wykazać, że dla każdej pary liczb naturalnych $a \geqslant 2$, $b \geqslant 1$ istnieje nieskończenie wiele takich liczb naturalnych n, że liczba $ba^n + 1$ jest złożona.

883. Funkcja f musi być parzysta, bowiem z podstawień $y = x$ oraz $y = -x$ dostajemy $f(x^2) = f(-x^2)$. Dalej badamy wartości f dla argumentów nieujemnych. Weźmy dowolną liczbę $t \geqslant 0$ i podstawmy w równaniu $x = y = \sqrt{t}$. Otrzymujemy równość

$$f(2t) = 3f(t).$$

Wobec dowolności t wynikają z niej związki

$$f(4t) = 9f(t), \qquad f(16t) = 81f(t),$$
$$f(10t) = 3f(5t), \qquad f(12t) = 9f(3t)$$

(i wiele innych, podobnych; te będą dalej przydatne). Kolejne podstawienie $x = \sqrt{t}$, $y = 2\sqrt{t}$ daje równość

$$f(5t) = f(t) + f(2t) + f(4t) = 13f(t),$$

skąd

$$f(10t) = 3f(5t) = 39f(t)$$

oraz

$$f(25t) = 13f(5t) = 169f(t);$$

zaś podstawienie $x = \sqrt{t}$, $y = 3\sqrt{t}$ daje

$$f(t) + f(3t) + f(9t) = f(10t) = 39f(t)$$

i w konsekwencji

$$f(9t) = 38f(t) - f(3t). \tag{1}$$

Wreszcie z podstawienia $x = 3\sqrt{t}$, $y = 4\sqrt{t}$ otrzymujemy

$$f(9t) + f(12t) + f(16t) = f(25t) = 169f(t),$$

czyli (stale patrząc na równości uzyskane wyżej)

$$f(9t) + 9f(3t) + 81f(t) = 169f(t).$$

Zastępujemy początkowy składnik przez prawą stronę wzoru (1) i po redukcji dostajemy zależność

$$f(3t) = \tfrac{25}{4}f(t). \tag{2}$$

Zatem

$$f(9t) = f(3 \cdot 3t) = \left(\tfrac{25}{4}\right)^2 f(t). \tag{3}$$

Wstawiamy uzyskane związki (2) i (3) do równania (1):

$$\left(\tfrac{25}{4}\right)^2 f(t) = 38f(t) - \tfrac{25}{4}f(t).$$

Stąd, ostatecznie, $f(t) = 0$. Wszystkie wypisane zależności były słuszne dla dowolnej liczby $t \geqslant 0$. Funkcja (parzysta) f jest więc identycznie równa zeru (i oczywiście spełnia zadane równanie).

884. Autor zadania (pan Witold Bednarek) proponuje taką konstrukcję: niech p będzie ustalonym dzielnikiem pierwszym liczby $ba + 1$. Przyjmijmy

$$n_k = (p-1)k + 1 \qquad (k = 1, 2, 3, \ldots).$$

Oczywiście a nie dzieli się przez p, więc na mocy małego twierdzenia Fermata $a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$. Wobec tego

$$ba^{n_k} + 1 = b\big(a^{p-1}\big)^k a + 1 \equiv ba + 1 \equiv 0 \pmod{p}.$$

Zatem każda z liczb $ba^{n_k} + 1$ (dla $k = 1, 2, 3, \ldots$) dzieli się przez p; przy tym jest większa od p (bowiem $p \leqslant ba + 1 < ba^{n_k} + 1$); jest więc liczbą złożoną.

Czołówka ligi zadaniowej **Klub 44 M** po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań 877 ($WT = 1{,}36$) i 878 ($WT = 3{,}29$) z numeru 3/2024

Piotr Kumor	Olsztyn	46,57
Łukasz Merta	Kraków	43,92
Szymon Kitowski	Warszawa	41,11
Adam Woryna	Ruda Śl.	40,91
Witold Bednarek	Łódź	37,29
Michał Adamaszek	Kopenhaga	35,90
Krzysztof Zygan	Lubin	34,43
Jędrzej Biedrzycki		31,02
Andrzej Kurach	Ryjewo	30,66
Tomasz Wietecha	Tarnów	30,14

Mocny akcent! Pan Piotr Kumor, niezwykle aktywny uczestnik Ligi, właśnie zamknął szesnaste okrążenie!

Skrót regulaminu

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru n w terminie do końca miesiąca $n + 2$. Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze $n + 4$. Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przesyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**. Można je przesyłać również pocztą elektroniczną pod adresem `delta@mimuw.edu.pl` (preferujemy pliki pdf). Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez współczynnik trudności danego zadania: $WT = 4 - 3S/N$, przy czym S oznacza sumę ocen za rozwiązania tego zadania, a N – liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (**M** lub **F**) – i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu **44** punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (**M** lub **F**), zostaje on członkiem **Klubu 44**, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo – to tytuł **Weterana.** Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 2/2002 oraz znajduje się na stronie `deltami.edu.pl`.