Skojarzenia – część 2

Bartłomiej BZDĘGA

Uniwersytet im. A. Mickiewicza w Poznaniu

Zachęcam Czytelnika, żeby przed przystąpieniem do rozwiązywania zadań zapoznał się z poprzednim kącikiem (nr 69 w Δ_{24}^{9}) oraz z artykułem o twierdzeniu Tutte'a i twierdzeniu Halla ($\star$) (s. 16), zamieszczonym w niniejszym numerze. Znajdują się w nim definicje takich pojęć i oznaczeń, jak *ścieżka powiększająca*, *graf dwudzielny* czy $\mathcal{O}(G)$, wykorzystywane w poniższych zadaniach. Przypomnijmy również, że graf *d-regularny* to taki, w którym stopień każdego wierzchołka jest równy d.

Zadania

1. Dowieść, że skojarzenie M w grafie G można powiększyć wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje ścieżka powiększająca M w grafie G (twierdzenie Berge'a).
2. Mostem nazywamy taką krawędź e grafu G, że graf $G-e$ ma więcej spójnych składowych niż graf G. Dowieść, że graf 3-regularny bez mostów ma skojarzenie pełne (twierdzenie Petersena).
3. Udowodnić, że drzewo ma co najwyżej jedno skojarzenie pełne.
4. Dowieść, że drzewo $T=(V,E)$ o co najmniej dwóch wierzchołkach ma skojarzenie pełne wtedy i tylko wtedy, gdy

   (D) $$\forall_{v\in V}\ \mathcal{O}(T-v)=1.$$
5. Znaleźć błąd w następującym rozumowaniu:

   Wykażemy, że graf $G=(V,E)$, mający cykl Hamiltona, ma skojarzenie pełne. Weźmy dowolny $S\subseteq V$. Ponieważ wszystkie wierzchołki grafu G leżą na jednym cyklu, graf $G-S$ ma najwyżej $|S|$ spójnych składowych, więc tym bardziej $\mathcal{O}(G-S)\leqslant|S|$. Graf G spełnia zatem warunek Tutte'a, a więc ma skojarzenie pełne.
6. Niech $a,b\geqslant 3$ będą liczbami naturalnymi. Z $2n$ klocków o wymiarach $a\times b\times 1$ zbudowano prostopadłościan o wysokości 2. Dowieść, że w ten prostopadłościan można wbić pionowo n gwoździ w taki sposób, by każdy z klocków został przebity.
7. Rozważmy graf dwudzielny o dwupodziale (A,B), w którym
   $$\min_{a\in A}\deg(a)\geqslant\max_{b\in B}\deg(b).$$
   Dowieść, że ten graf ma skojarzenie nasycające zbiór A (uogólnione twierdzenie o małżeństwach).
8. Dowieść, że niepusty regularny graf dwudzielny jest sumą krawędziowo rozłącznych pełnych skojarzeń.
9. Niech Δ będzie największym stopniem wierzchołka w grafie dwudzielnym G. Dowieść, że graf G jest sumą Δ rozłącznych krawędziowo skojarzeń (twierdzenie Königa).
10. Niech $n>m$ będą liczbami naturalnymi. W tablicy kwadratowej $n\times n$ wybrano m wierszy, a następnie w każdym z nich wpisano, w pewnej kolejności, liczby $1,2,\ldots,n$. Wiadomo, że w każdej kolumnie występuje m różnych liczb. Wykazać, że można uzupełnić tę tablicę do kwadratu łacińskiego $n\times n$.

Rozwiązania

1. Implikacja ($\Leftarrow$) to lemat o ścieżce naprzemiennej z artykułu ($\star$). ($\Rightarrow$) Niech M i M' będą skojarzeniami w grafie G, przy czym $|M'|>|M|$. Rozważyć multigraf będący sumą skojarzeń M i M' (podobnie jak w dowodzie twierdzenia Tutte'a w artykule). Można go podzielić na parami rozłączne cykle i ścieżki. Jedna z tych ścieżek ma więcej krawędzi z M' niż z M – i to ta ścieżka powiększa skojarzenie M.

2. Trzeba wykazać, że spełniony jest warunek (T) z artykułu. Niech $S\subsetneq V$ oraz niech N będzie nieparzystą spójną składową grafu $G-S$, o ile taka istnieje. Niech l będzie liczbą krawędzi łączących N i S w grafie G. Wiadomo, że $l>1$, bo w grafie G nie ma mostów. Ponadto $2\nmid l$, bo stopnie wierzchołków należących do N oraz ich liczba są nieparzyste. Wynika stąd, że $l\geqslant 3$. Suma stopni wierzchołków należących do S wynosi $3|S|$, więc składowych nieparzystych jest nie więcej niż $|S|$.

3. Niech M_1 i M_2 będą skojarzeniami pełnymi w drzewie T. Rozważmy multigraf będący sumą M_1 i M_2 (podobnie jak w dowodzie twierdzenia Tutte'a). Jest on sumą parami rozłącznych cykli. Każdy z nich ma długość 2, bo w grafie T nie ma cykli. Stąd $M_1=M_2$.

4. ($\Rightarrow$) Warunek (D) to warunek (T) osłabiony dodatkowym założeniem $|S|=1$, więc teza wynika z twierdzenia Tutte'a. ($\Leftarrow$) Dowód będzie indukcyjny ze względu na $|V|$. Dla $|V|=2$ teza jest oczywista. Załóżmy, że spełniony jest warunek (D). Niech $u\in V$ będzie stopnia 1 (jeśli $|V|\geqslant 2$, to drzewo ma taki wierzchołek) i niech v będzie jedynym sąsiadem u. Graf $T-v$ ma spójną składową złożoną z pojedynczego wierzchołka u oraz być może jakieś jeszcze spójne składowe, które zgodnie z (D) muszą być parzyste. Niech S będzie jedną z nich; oczywiście S jest drzewem i ma mniej wierzchołków niż T. Niech R będzie spójną składową grafu $S-w$, a R' – zawierającą ją spójną składową grafu $T-w$. Jeśli $v\notin R'$, to $R=R'$, a jeśli $v\in R$, to R i R' są tej samej parzystości. Z tego wynika, że składowa S spełnia warunek (D), więc ma pełne skojarzenie na mocy założenia indukcyjnego. Analogicznie rozumujemy dla pozostałych spójnych składowych. Te skojarzenia wraz z krawędzią uv dają pełne skojarzenie w drzewie T.

5. Dla nieparzystych $|V|$ mamy $\mathcal{O}(G-\emptyset)=1\nleqslant|\emptyset|$.

6. Klocki tworzą dwie warstwy. Rozważmy graf dwudzielny o dwupodziale (A,B), w którym zbiór A stanowią klocki jednej z warstw, a B – drugiej. Krawędź ab istnieje wtedy i tylko wtedy, gdy klocek $a\in A$ oraz $b\in B$ mają niezerową wspólną powierzchnię; równoważnie – gdy można wbić gwóźdź przebijający jednocześnie klocki a i b. Graf ten spełnia warunek (H) dla zbioru A, więc ma skojarzenie nasycające zbiór A. Jest to skojarzenie pełne, gdyż $|A|=|B|$.

7. Istnieje taka liczba naturalna d, że $\deg(a)\geqslant d\geqslant\deg(b)$ dla wszystkich $a\in A$ oraz $b\in B$. Dla niepustego $S\subseteq A$ mamy $d|N(S)|\geqslant\sum_{w\in N(S)}\deg(w)=\sum_{v\in S}\deg(v)\geqslant d|S|$, więc zachodzi warunek (H).

8. Rozważmy d-regularny graf dwudzielny G o dwupodziale (A,B). Ze względu na regularność mamy $|A|=|B|$. Na mocy poprzedniego zadania graf G ma skojarzenie pełne M. Graf G', powstały przez usunięcie z G krawędzi należących do M, jest $(d-1)$-regularny, więc wystarczy skorzystać z indukcji. Dla $d=1$ twierdzenie jest oczywiste.

9. Wystarczy wykazać, że G jest podgrafem pewnego Δ-regularnego grafu dwudzielnego, i skorzystać z poprzedniego zadania. Rozważmy graf dwudzielny $G=G_0$ o dwupodziale (A_0,B_0). Graf G_{t+1} o dwupodziale (A_{t+1},B_{t+1}) będziemy tworzyć z grafu G_t o dwupodziale (A_t,B_t) w następujący sposób. Niech G'_t o dwupodziale (A'_t,B'_t) będzie kopią grafu G_t. Przez δ_t oznaczmy najmniejszy stopień wierzchołka w grafie G_t, przy czym $\delta=\delta_0$. W grafie G_{t+1} określamy: $A_{t+1}=A_t\cup B'_t$, $B_{t+1}=A'_t\cup B_t$. Krawędzie prowadzimy tak, jak były w grafach G_t i G'_t, a dodatkowo łączymy wszystkie wierzchołki stopnia δ_t z grafu G_t z ich odpowiednikami w grafie G'_t. Jest jasne, że $\delta_{t+1}=\delta_t+1$. Graf $G_{\Delta-\delta}$ jest poszukiwanym grafem.

10. Niech $A=\{a_1,a_2,\ldots,a_n\}$ i $B=\{b_1,b_2,\ldots,b_n\}$. W grafie o dwupodziale (A,B) istnieje krawędź a_ib_j wtedy i tylko wtedy, gdy w i-tej kolumnie tablicy z zadania jest liczba j. Wówczas każdy wiersz odpowiada za skojarzenie pełne w grafie $K_{n,n}$ (każdy wierzchołek z A połączony z każdym z B). Do uzupełnienia pozostaje podział na skojarzenia pełne w grafie dwudzielnym $(n-m)$-regularnym, a taki istnieje na mocy zadania 8.