Twierdzenie Tutte'a i twierdzenie Halla

*Bartłomiej BZDĘGA**

* Uniwersytet im. A. Mickiewicza w Poznaniu

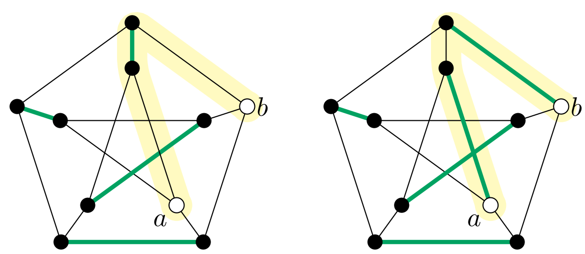
W tym miesiącu w Kąciku Początkującego Olimpijczyka (patrz ostatnia strona *Delty*) kontynuujemy temat *skojarzeń w grafach*. Są z nim związane dwa ważne twierdzenia: Tutte'a i Halla. Ich uzasadnienia są bardzo pouczające, a ponieważ nie udałoby mi się ich zmieścić na ostatniej stronie, przedstawiam je w niniejszym artykule, Kącikowi pozostawiając same zadania z rozwiązaniami.

Przed przystąpieniem do lektury zachęcamy Czytelnika do zapoznania się z Kącikiem Początkującego Olimpijczyka nr 68 i 69 w Δ^8_{24} i Δ^9_{24}. Są tam wszystkie niezbędne definicje.

Zaczniemy od podstawowego narzędzia. Niech M będzie skojarzeniem w grafie G. Ścieżkę nazywamy *naprzemienną dla skojarzenia* M, jeśli ma krawędzie na zmianę nienależące i należące do M.

Lemat o ścieżce naprzemiennej. Jeśli istnieje ścieżka naprzemienna łącząca pewne dwa wierzchołki grafu G nienależące do skojarzenia M, to skojarzenie M nie jest największe.

Dowód: Niech P będzie opisaną w lemacie ścieżką naprzemienną. Ze skojarzenia M usuńmy te krawędzie, które należą do P i zamiast tego dołączmy te krawędzie P, które nie były wcześniej w M. W ten sposób otrzymujemy podgraf M', który ma o jedną krawędź więcej niż M.



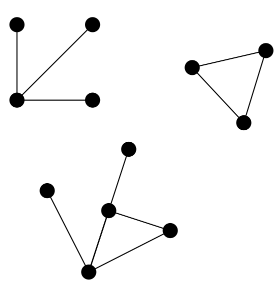
Ścieżka P została podświetlona na żółto. Na rysunku z lewej pogrubione zielone krawędzie należą do M, a z prawej – do M'

Ten podgraf jest nadal skojarzeniem, gdyż w wyniku przeprowadzonej powyżej operacji stopnie wierzchołków a i b wzrosły z 0 do 1, a pozostałe nie zmieniły się. $\square$

Ścieżka opisana w lemacie nazywana jest często *ścieżką powiększającą skojarzenie.*

Wprowadźmy teraz definicje potrzebne do sformułowania twierdzenia Tutte'a.

Graf nazywamy *spójnym*, jeśli każde dwa jego wierzchołki połączone są ścieżką. Każdy maksymalny (w sensie relacji bycia podgrafem) podgraf spójny danego grafu nazywamy jego *spójną składową*. Spójne składowe o parzystej liczbie wierzchołków będziemy nazywać *parzystymi*, a o nieparzystej – *nieparzystymi*. Oznaczmy przez $\mathcal{O}(G)$ liczbę nieparzystych spójnych składowych grafu G.



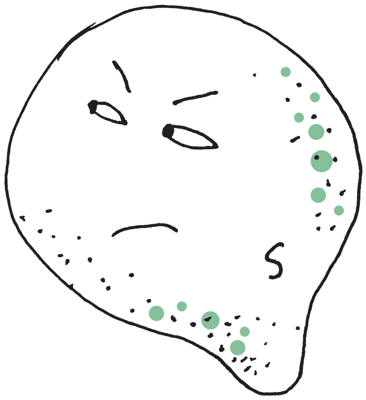
Powyższy graf G ma trzy spójne składowe, z czego dwie mają nieparzystą liczbę wierzchołków, zatem $\mathcal{O}(G) = 2$

Niech $G = (V, E)$ będzie grafem i niech $S \subsetneq V$. Przez $G - S$ rozumiemy graf G z usuniętymi wszystkimi wierzchołkami należącymi do S oraz usuniętymi wszystkimi krawędziami, które mają co najmniej jeden koniec w zbiorze S.

Twierdzenie Tutte'a. Graf $G = (V, E)$ ma skojarzenie pełne wtedy i tylko wtedy, gdy

(T) $$\forall_{S \subsetneq V}\ \mathcal{O}(G - S) \leqslant |S|.$$

Zbiory S spełniające warunek $\mathcal{O}(G - S) \leqslant |S|$ będziemy nazywać *dobrymi*, a niespełniające go – *niedobrymi*. Zwróćmy uwagę, że odrzucamy tu $S = V$ (wtedy $G - S$ nie jest grafem, choć nawet jeśli dopuścimy graf pusty, to ma on 0 składowych nieparzystych), ale uwzględniony jest zbiór pusty. Dla $S = \emptyset$ otrzymujemy w warunku (T), że $\mathcal{O}(G) = 0$, czyli każda spójna składowa grafu G jest parzysta. Jest to oczywisty warunek konieczny istnienia skojarzenia pełnego.



Dowód (⇒). Zakładamy, że graf $G = (V, E)$ ma skojarzenie pełne. Należy wykazać, że każdy zbiór $S \subsetneq V$ jest dobry. Dla $S = \emptyset$ już to zrobiliśmy, niech więc $|S| \geqslant 1$. Każda nieparzysta spójna składowa grafu $G - S$ ma przynajmniej jeden wierzchołek, który jest skojarzony z wierzchołkiem spoza niej. Nie może on należeć do innej spójnej składowej, więc musi należeć do zbioru S. Każdej spójnej składowej grafu $G - S$ można w ten sposób przypisać pewien wierzchołek ze zbioru S. To przyporządkowanie jest różnowartościowe (bo idzie wzdłuż krawędzi skojarzenia), więc $\mathcal{O}(G - S) \leqslant |S|$.

Dowód (⇐). Teraz zakładamy, że spełniony jest warunek (T). Dla dowodu nie wprost dodatkowo przypuśćmy, że w grafie G nie ma skojarzenia pełnego. Wówczas graf G ma parzystą liczbę wierzchołków (warunek (T) dla $S = \emptyset$) i nie jest grafem pełnym.

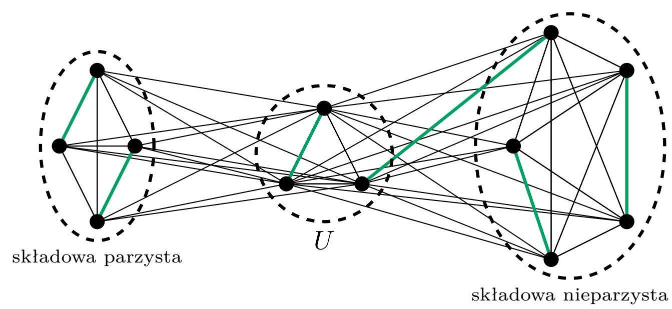
Niech $G' = G + e$ będzie grafem G z dodaną krawędzią e. Graf G' nadal spełnia warunek (T), ponieważ dla dowolnego $S \subsetneq V$ zachodzi $\mathcal{O}(G' - S) \leqslant \mathcal{O}(G - S)$. Istotnie, krawędź e może łączyć wierzchołki:

- z których co najmniej jeden należy do S;
- z tej samej spójnej składowej grafu $G - S$;
- z różnych parzystych spójnych składowych grafu $G - S$;
- z parzystej i nieparzystej składowej grafu $G - S$;
- z różnych nieparzystych spójnych składowych grafu $G - S$.

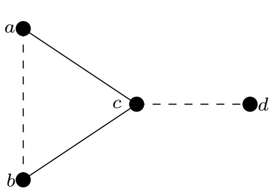
W pierwszych czterech przypadkach mamy $\mathcal{O}(G' - S) = \mathcal{O}(G - S)$, a w ostatnim $\mathcal{O}(G' - S) = \mathcal{O}(G - S) - 2$. Możemy zatem przyjąć bez utraty ogólności, że dodanie jakiejkolwiek krawędzi spowoduje zaistnienie skojarzenia pełnego.

Niech U będzie zbiorem wszystkich wierzchołków grafu G o stopniu $|V| - 1$, czyli wierzchołków połączonych z każdym innym. Wykażemy, że zbiór U jest niedobry, co będzie poszukiwaną sprzecznością.

Zauważmy najpierw, że nie wszystkie spójne składowe grafu $G - U$ są klikami – inaczej graf G miałby skojarzenie pełne.



W każdej spójnej składowej można by było dowolnie połączyć w pary wszystkie wierzchołki oprócz najwyżej jednego. Niesparowanych wierzchołków w składowych jest dokładnie $\mathcal{O}(G - U)$, więc możemy je połączyć z różnymi wierzchołkami ze zbioru U. Pozostałe wierzchołki ze zbioru U dowolnie łączymy w pary.

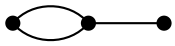


Teraz wykażemy, że w grafie G istnieje struktura widoczna na rysunku obok (linia przerywana oznacza tu brak sąsiedztwa). Niech S_0 będzie spójną składową grafu $G - U$ niebędącą kliką. Ma ona zatem dwa wierzchołki x i y, które nie są połączone krawędzią. Wierzchołki a, c, b wybieramy jako trzy kolejne na najkrótszej ścieżce łączącej x i y. Ponadto $c \notin U$, więc istnieje wierzchołek $d \in V$, z którym c nie jest połączony.

Przypominamy, że odejmując $\{v, w\}$, usuwamy wierzchołki v, w i wszystkie krawędzie mające co najmniej jeden koniec w v lub w.

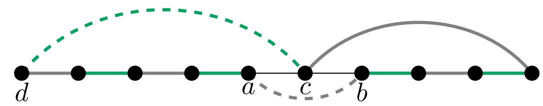
Wobec poczynionych wcześniej założeń, w grafie $G + ab$ znajdziemy pewne skojarzenie pełne M_1, a w grafie $G + cd$ – skojarzenie pełne M_2. Ponieważ w G nie było skojarzenia pełnego, więc krawędź ab należy do skojarzenia M_1, a cd – do M_2. Skojarzenie $M_1 - \{a, b\}$ ma o jedną krawędź mniej niż miałoby skojarzenie pełne w grafie G, analogicznie skojarzenie $M_2 - \{c, d\}$. Wystarczy zatem znaleźć ścieżkę powiększającą któreś z tych skojarzeń.

Multigraf to graf, w którym dopuszczamy wielokrotne krawędzie, na przykład jak ten poniżej.



Sumą skojarzeń M_1 i M_2 jest multigraf H, w którym wszystkie wierzchołki są stopnia 2. Taki multigraf jest sumą parami rozłącznych cykli, być może o długości 2. W każdym takim cyklu krawędzie z M_1 i M_2 występują na przemian.

Jeśli krawędzie ab i cd leżą na rozłącznych cyklach, odpowiednio C_1 i C_2, to ścieżka $C_1 - ab$ powiększa skojarzenie $M_1 - \{a, b\}$ w grafie G. Pozostaje przypadek, gdy ab i cd leżą na jednym cyklu. Możemy przyjąć, że wierzchołki a, b, c, d leżą na tym cyklu w tejże kolejności.



Wówczas ścieżka od c do d powiększa skojarzenie $M_2 - \{c, d\}$ w grafie G. □

Można powiedzieć, że twierdzenie Tutte'a pozwala stwierdzić, czy w danej klasie, w której wiadomo, kto z kim się lubi, możemy usadzić uczniów w ławkach w taki sposób, że każdy siedzi z kimś, kogo lubi. A co, jeśli dodatkowo chcemy, by w każdej ławce siedzieli chłopiec i dziewczynka? Tu wygodnego kryterium dostarcza *twierdzenie Halla*, które omawiamy poniżej.

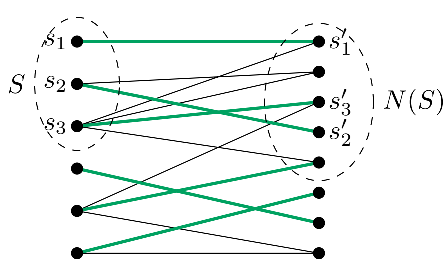
Ale najpierw potrzebne definicje. *Grafem dwudzielnym o dwupodziale* (A, B) nazywamy taki graf, w którym zbiór wierzchołków jest sumą rozłącznych zbiorów A i B, ponadto każda krawędź ma jeden koniec w A, a drugi w B. Mówimy, że skojarzenie M *nasyca zbiór* A, jeśli każdy wierzchołek ze zbioru A należy do M.

Niech $G = (V, E)$ będzie grafem i niech $U \subseteq V$. *Sąsiedztwem zbioru* U nazywamy zbiór tych wierzchołków spoza U, które mają co najmniej jednego sąsiada w U. Oznaczamy je przez $N_G(U)$. Jeśli jest oczywiste, o jaki graf chodzi, to można pisać po prostu $N(U)$.

Twierdzenie Halla. Graf dwudzielny G o dwupodziale (A, B) ma skojarzenie nasycające zbiór A wtedy i tylko wtedy, gdy

(H) $$\forall_{S \subseteq A} \; |N_G(S)| \geqslant |S|.$$

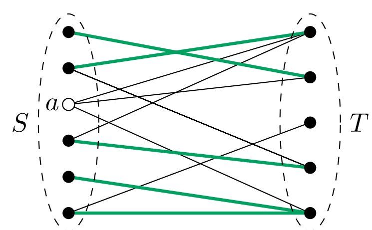
Dowód $(\Rightarrow)$. Załóżmy, że graf ma skojarzenie M nasycające zbiór A. Niech $S = s_1, s_2, \ldots, s_m \subseteq A$ będzie dowolny. Przez $s'_i \in B$ oznaczmy unikalnego sąsiada wierzchołka s_i w skojarzeniu M.



Wówczas $s'_1, s'_2, \ldots, s'_m \in N(S)$ są różne, więc $|N(S)| \geqslant m = |S|$.

Dowód $(\Leftarrow)$. Niech M będzie największym skojarzeniem w grafie G. Przypuśćmy, że skojarzenie M nie nasyca zbioru A. Udowodnimy, że warunek (H) nie jest wtedy spełniony.

Na mocy przypuszczenia nie wprost, pewien wierzchołek $a \in A$ nie należy do skojarzenia M. Rozważmy wszystkie wierzchołki grafu G połączone z wierzchołkiem a za pomocą ścieżek naprzemiennych dla skojarzenia M. Niech S oznacza tę część spośród wspomnianych wierzchołków, która należy do zbioru A, razem z wierzchołkiem a, natomiast T – tę część, która jest w zbiorze B.



Każda ścieżka naprzemienna rozpoczęta w wierzchołku a i zakończona w wierzchołku należącym do T może być kontynuowana – w przeciwnym razie otrzymalibyśmy ścieżkę powiększającą skojarzenie M. W takim razie z każdym wierzchołkiem $t \in T$ możemy związać wierzchołek $s \in S$, który pojawia się bezpośrednio po t na pewnej ścieżce naprzemiennej, startującej z a. Wierzchołek s jest wyznaczony jednoznacznie, gdyż krawędź ts należy do skojarzenia M (a w skojarzeniu nie mogą pojawić się krawędzie ts i ts' dla $s \neq s'$). Dokładnie tak samo uzasadniamy, że różnym wierzchołkom z T odpowiadają różne wierzchołki z S, i że są one różne od a. Dowodzimy w ten sposób, że $|S| > |T|$.

Jest jasne, że $T \subseteq N(S)$. Wykażemy, że zachodzi tu równość. Niech $w \in N(S)$ – wtedy ma on sąsiada $s \in S$, więc albo $s = a$ (i wtedy $w \in T$), albo istnieje ścieżka naprzemienna P o kolejnych wierzchołkach $a, \ldots, t, s$. Krawędź ts należy do skojarzenia M, więc krawędź sw nie może do niego należeć. Wobec tego ścieżka o kolejnych wierzchołkach $a, \ldots, t, s, w$ jest naprzemienna i w konsekwencji $w \in T$.

Wobec powyższych rozważań $|S| > |T| = |N(S)|$ i warunek (H) nie jest spełniony, co kończy dowód. □

Przykłady zastosowań oraz zadania Czytelnik znajdzie na ostatniej stronie niniejszego numeru *Delty*.