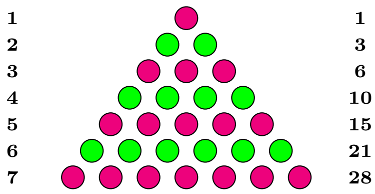
Byle nie dodawać

*Paweł Rafał BIELIŃSKI**

* Nauczyciel, Warszawa

Jak głosi legenda opowiadana o młodym Gaussie, pewnego dnia postawiono go przed zadaniem obliczenia sumy liczb naturalnych od 1 do 40 włącznie. Młodego Gaussa najwyraźniej mało co odrzucało bardziej niż perspektywa dodawania garstki całkiem niedużych liczb, więc zamiast tego, z użyciem pewnej chytrej sztuczki, wyprowadził ogólny wzór na n-tą *liczbę trójkątną*:

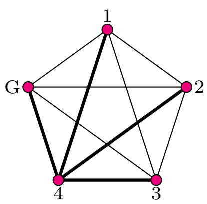
$$T(n) = 1 + 2 + 3 + \dots + n.$$



My także spróbujemy tego dokonać, ale wykorzystamy w tym celu interpretację kombinatoryczną podanej sumy. Następnie zaś przekonamy się, że nasza metoda pięknie się uogólnia i pozwala unikać dodawania nawet w wyraźnie trudniejszych sytuacjach.

Liczby trójkątne

Wyobraźmy sobie przyjęcie dla fanów gier karcianych, na które oprócz gospodarza przybyło n gości. Na takim przyjęciu ktoś powinien zagrać w garibaldkę – grę dla dwóch osób. Na ile sposobów można wybrać dwójkę chętnych do tej gry?



Można też to zagadnienie rozumieć jako zliczanie krawędzi w grafie pełnym

Łatwo tę wartość obliczyć, uwzględniając kolejność przybywania gości. Kiedy na miejsce przybył pierwszy z nich, zastał jedynie gospodarza i mógłby co najwyżej zagrać z nim. Kiedy wszedł drugi, pojawiły się nowe opcje, bo teraz ten właśnie przybyły gość może zagrać z dowolną z dwóch już obecnych osób. Podobnie trzeci z przybyłych mógłby zagrać w parze z którąś z trzech obecnych osób. I tak dalej: dla k-tego gościa istnieje na tym przyjęciu dokładnie k dwójek, w których jest on ostatnim przybyłym członkiem. Zatem możliwych dwójek jest dokładnie $1 + 2 + 3 + \dots + n$. Innymi słowy, pogrupowaliśmy możliwe dwójki graczy według najpóźniej przybyłej osoby i okazało się, że ich łączna liczba jest n-tą liczbą trójkątną.

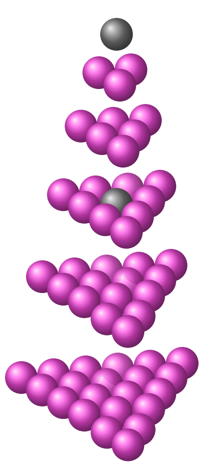
Z drugiej strony nie jest wcale trudno obliczyć ową liczbę bez takiego grupowania: przecież aby wybrać dwóch graczy, wystarczy wybrać jednego, dowolnego – to zrobimy na $n + 1$ sposobów – następnie drugiego spośród pozostałych n. W ten sposób jednak policzylibyśmy każdą dwójkę dwukrotnie, bo każdy z dwóch jej członków mógł być wybrany jako ten pierwszy. Dochodzimy zatem do wniosku, że szukana liczba dwójek wynosi $\frac{1}{2}n(n+1)$. Z całej tej opowieści wynika zaś tożsamość:

$$T(n) = 1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Możemy teraz odpowiedzieć na pytanie Gaussa: sumą liczb naturalnych od 1 do 40 włącznie jest $\frac{40 \cdot 41}{2} = 820$.

Liczby piramidalne

Liczby piramidalne nazywa się też *czworościennymi*, gdyż typowa piramida ma 4, a nie 3, strony.



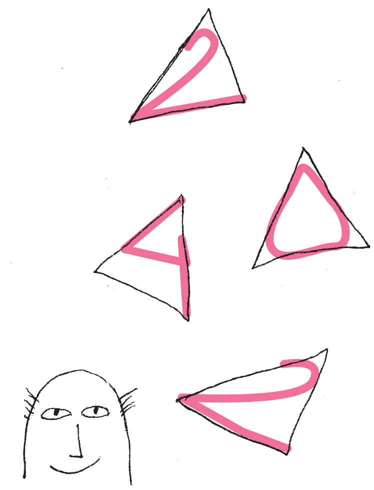
Zbadamy teraz dalsze możliwości zastosowanej powyżej metody. Obliczymy mianowicie n-tą *liczbę piramidalną*, równą sumie kolejnych liczb trójkątnych:

$$P(n) = T(1) + T(2) + T(3) + \dots + T(n).$$

Celowo nie podstawiamy tu żadnego wzoru za $T(k)$, ponieważ będziemy chcieli korzystać przede wszystkim z opisanej powyżej interpretacji kombinatorycznej.

Wyobraźmy więc sobie przyjęcie dla fanów gier karcianych, na które oprócz dwojga gospodarzy przybyło n gości. Na takim przyjęciu ktoś powinien zagrać w preferansa – grę dla trzech osób. Na ile sposobów można wybrać taką trójkę graczy?

Podobnie jak ostatnio, rozważmy gości przyjęcia w kolejności ich przybywania, pamiętając o dwojgu obecnych przez cały czas gospodarzy. Gdy przybywa pierwszy gość, powstaje pierwsza możliwa trójka. W chwili przybycia drugiego pojawiają się nowe opcje, mianowicie te trójki, w których skład on wchodzi. Ogólnie, gdy przybywa k-ty gość, pojawia się pewna liczba nowych możliwości. Kluczowa obserwacja: trójek z udziałem właśnie przybyłego jest dokładnie tyle, co dwójek bez niego. Tych z kolei jest $T(k)$, bo bez tego gościa dostępnych jest



$k+1$ osób (właśnie dlatego w tej opowieści mamy drugiego gospodarza). Wobec tego opisana liczba rzeczywiście jest równa $T(1)+T(2)+T(3)+\dots+T(n)$, czyli $P(n)$.

Znowu możemy jednak ominąć kolejność przybywania gości. Wystarczy zauważyć, że trójka graczy to jeden, wybrany spośród $n+2$, i jeszcze dwójka spośród $n+1$ graczy, wybrana na $T(n)$ sposobów. I znowu, uwzględniając, że w trójce dowolny gracz mógłby być tym pierwszym, otrzymujemy odpowiedź w nowej postaci: $\frac{1}{3}(n+2)T(n)$. Po lekkim uporządkowaniu dochodzimy do tożsamości

$$P(n)=T(1)+T(2)+T(3)+\dots+T(n)=\frac{n(n+1)(n+2)}{6}.$$

W ten sposób możemy łatwo – i bez dodawania – obliczyć np. $P(22)$, czyli sumę 22 początkowych liczb trójkątnych. Wynosi ona znaczące

$$\frac{22\cdot 23\cdot 24}{6}=\mathbf{2024}.$$

Dalej, wyżej!

Pokusimy się obecnie o daleko idące uogólnienie. Będziemy rozważać liczby trójkątne oraz piramidalne jako szczególne przypadki liczb piramidalnych *pewnego wymiaru*, równego tu odpowiednio 2 lub 3. Przyjmiemy, że liczba piramidalna danego wymiaru jest sumą początkowych liczb piramidalnych wymiaru o 1 niższego – można to interpretować jako układanie kulek w wielowymiarowe piramidalne stosy, tak jak dla liczb trójkątnych i piramidalnych.

Oznaczmy przez $P_0(n)$ n-tą liczbę piramidalną *wymiaru* 0, umawiając się przy tym, że $P_0(n)=1$ dla każdego n. Dalej, dla danego $w>0$ niech $P_w(n)=P_{w-1}(1)+P_{w-1}(2)+P_{w-1}(3)+\dots+P_{w-1}(n)$. Łatwo można zobaczyć, że wówczas $P_1(n)=n$, $P_2(n)=T(n)$ oraz $P_3(n)=P(n)$, czyli przyjęta przez nas konwencja rzeczywiście obejmuje wcześniejsze rozważania.

Jeśli, Drogi Czytelniku, przeżywasz tutaj małe déjà vu, to być może z powodu uderzająco podobnego zagadnienia, o którym pisał Wojciech Guzicki w Δ^7_{95}.

Czy możemy wyprowadzić ogólny wzór na $P_w(n)$? Okazuje się, że tak, a ponadto wystarczy powtórzyć rozumowanie przedstawione powyżej. Wyobraźmy sobie bowiem przyjęcie dla fanów gier karcianych, na którym obecnych jest $w-1$ gospodarzy oraz n gości i chcemy. rozegrać partię w-ysiąca – gry dla w graczy.

Z jednej strony, gdy najwyższy numer gościa wśród grających wynosi k, to pozostałych możemy wybrać na $P_{w-1}(k)$ sposobów. Rozpatrując kolejno możliwe k, dochodzimy do wniosku, że grających można wybrać na $P_{w-1}(1)+P_{w-1}(2)+P_{w-1}(3)+\dots+P_{w-1}(n)$, czyli $P_w(n)$ sposobów.

Czytelnik Edukowany, znający *symbol Newtona* i jego interpretację kombinatoryczną, może zaatakować rozpatrywany problem z jeszcze jednej strony. W ten sposób odkryje kombinatoryczny dowód wzoru $\binom{n}{k}=\frac{n!}{k!(n-k)!}$.

Z drugiej strony natomiast można wybrać w graczy, wybierając najpierw jednego, a następnie pozostałych. Uwzględniając, że wśród $n+w-1$ graczy można wybrać tego pierwszego na $n+w-1$ sposobów, mamy nowy wzór na szukaną liczbę: $\frac{n+w-1}{w}P_{w-1}(n)$. Podstawiając za $P_{w-1}(n)$, a następnie za $P_{w-2}(n)$ i tak dalej, dojdziemy do wzoru:

$$P_w(n)=\frac{n(n+1)(n+2)\dots(n+w-1)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot w},$$

gdzie jedynkę w mianowniku dopisaliśmy głównie dla estetyki. Innymi słowy, jest to iloczyn w kolejnych liczb naturalnych, zaczynający się od n, podzielony przez iloczyn w kolejnych liczb naturalnych, ale tym razem zaczynając od 1. To nad wyraz elegancki wynik, nieprawdaż?

Pogłówkuj i Ty! Wyzwania

Oblicz, tj. przedstaw w postaci zwartego wzoru. Wszystkie chwyty są dozwolone!

1. $n\cdot 1+(n-1)\cdot 2+(n-2)\cdot 3+\dots+1\cdot n$.

2. $nT(1)+(n-1)T(2)+(n-2)T(3)+\dots+1\cdot T(n)$.

3. $T(n)\cdot T(1)+T(n-1)\cdot T(2)+T(n-2)\cdot T(3)+\dots+T(1)\cdot T(n)$.

4. $T(2n)-T(2n-1)+T(2n-2)-\dots+T(2)-T(1)$.

5. $T(1)+T(3)+T(5)+\dots+T(2n-1)$.

Wskazówki do wyzwań zamieściliśmy na stronie 21, w numerze znajdują sie także odpowiedzi.