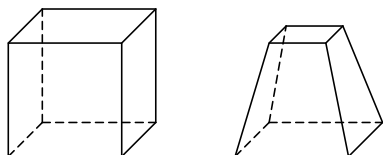


Ile jest sześciścianów? *Heinz SCHUMANN*, Bronisław PABICH***

* University of Education Weingarten
 **XX Liceum Ogólnokształcące w Krakowie



Aby dobrze oswoić się ze wzorem Eulera, polecamy poświęcony mu *Deltoid* z Δ_{16}^3 oraz tekst *Polowanie na uroczy wielościan* z Δ_{16}^3 , które w podobny sposób wykorzystuje wzór Eulera.

Najpewniej każdy Czytelnik *Delty* wie, co to jest *sześciścian* – i że co do zasady (fachowo: co do podobieństwa) jest tylko jeden taki w geometrycznym świecie. W niniejszym artykule odpowiemy na pytanie, ile jest *sześciścianów wypukłych*, czyli brył, od których wymagamy jedynie wypukłości i posiadania sześciu ścian. Nie będziemy przy tym rozróżniać wielościanów różniących się jedynie ułożeniem wierzchołków w przestrzeni – na przykład sześciścian oraz ścięty ostrosłup czworokątny (patrz margines) liczymy jako ten sam sześciścian.

Rozpocznijmy od przypomnienia *wzoru Eulera*: jeśli pewien wypukły wielościan ma s ścian, k krawędzi oraz w wierzchołków, to zachodzi:

$$s - k + w = 2.$$

Zauważmy ponadto, że z każdą krawędzią związane są dwa wierzchołki (jej końce) oraz z każdym wierzchołkiem związane są co najmniej trzy krawędzie (te, do których ów wierzchołek należy). Podobnie, z każdą krawędzią związane są dwie ściany, a z każdą ścianą – co najmniej trzy krawędzie. Wynikają stąd nierówności:

$$2k \geq 3w \quad \text{oraz} \quad 2k \geq 3s.$$

Wstawiając w powyższych nierównościach $k = w + s - 2$ (co wynika ze wzoru Eulera), otrzymamy ostatecznie

$$\frac{1}{2}s + 2 \leq w \leq 2s - 4.$$

Przyjmując wyżej $s = 6$, otrzymujemy, że liczba wierzchołków sześciścianu może wynosić 5, 6, 7 lub 8. Dostajemy w ten sposób cztery kategorie sześciścianów, w ramach których każdy ma taką samą liczbę wierzchołków (więc również krawędzi). Różnice dotyczą konfiguracji ścian bocznych. Mogą być nimi tylko trójkąty, kwadraty i pięciokąty – sześciokąty nie są możliwe, gdyż taka ściana musiałaby mieć dodatkowych sześć sąsiadujących ścian.

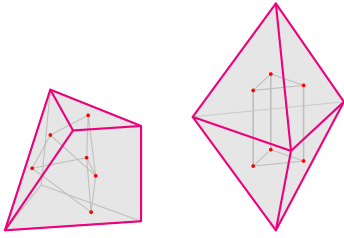
Wyniki naszych wstępnych poszukiwań przedstawia poniższa tabela. Wielkości s_3 , s_4 i s_5 oznaczają odpowiednio liczbę ścian trój-, czworo- i pięciokątnych.

	I	II	III	IV	V	VI	VII
w	5	6	6	7	7	8	8
k	9	10	10	11	11	12	12
s_3	6	4	5	2	3		2
s_4		2		4	2	6	2
s_5			1		1		2

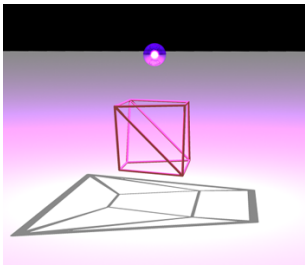
- I to podwójny ostrosłup trójkątny.
- II powstaje z graniastosłupa trójkątnego przez odcięcie odpowiedniego czworościanu.
- III to ostrosłup pięciokątny.
- IV jest połową sześciścianu, uzyskaną w wyniku przecięcia płaszczyzną przechodzącą przez przeciwległe wierzchołki i środki dwóch krawędzi (w przekroju dostajemy romb).
- V to klin utworzony z pięciokątnego ostrosłupa za pomocą dwóch cięć.
- VI jest tradycyjnym sześciścianem.
- VII został utworzony z sześciścianu za pomocą cięcia o pięciokątnym przekroju.

Lista wszystkich sześciścianów pojawiła się już w *Delcie* – patrz artykuł Marka Kordosa z Δ_{01}^2 .

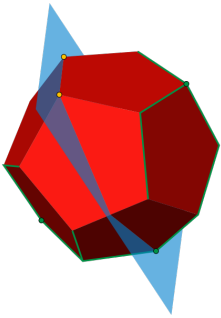
Znaleźliśmy siedem różnych sześciścianów. Skąd jednak wiadomo, że nie ma innych? Łatwo uwierzyć, że z 6 trójkątów można zbudować tylko wielościan typu I, z 5 trójkątów i pięciokąta tylko wielościan typu III, z 6 czworokątów tylko wielościan typu VI, z kolei z dwóch pięciokątów, które muszą mieć wspólną krawędź, tylko typ VII. Badanie wielu przypadków kombinacji ścian dla pozostałych konfiguracji (w, s_3, s_4, s_5) nie jest jednak zbyt obiecujące. W sukurs przyjdą nam pewne dodatkowe narzędzia teoretyczne.



Wielościany typu I i II wraz ze swoimi wielościanami dualnymi



Wielościan i jego cień, czyli diagram Schlegela. David Eppstein, CC BY-SA 3.0, via Wikimedia Commons



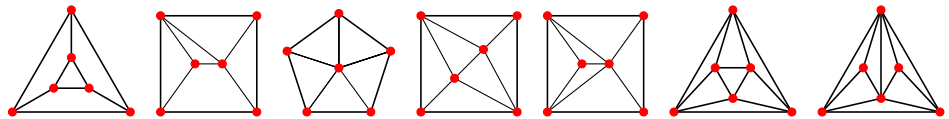
Uzasadnienie 3-spójności diagramu Schlegela w pigułce: wybierzmy dowolne wierzchołki w i v wielościanu \mathcal{W} . Udowodnimy, że dowolne dwa inne wierzchołki można połączyć ścieżką, która nie przechodzi ani przez u , ani przez v . Rozważmy płaszczyznę przechodzącą przez w , v i jeszcze jeden (dowolny) wierzchołek u . Rozbija ona \mathcal{W} na dwie części. Wierzchołki każdej z nich można zwiedzić, startując z u i poruszając się po krawędziach, które nie mają końca w w i v . Ilustracja: David Eppstein, CC BY-SA 4.0, via Wikimedia Commons

Rozpatrzmy pewien wielościan wypukły \mathcal{W} . Wybierzmy dowolne punkty na ścianach tego wielościanu i połączmy odcinkami pary punktów leżące na sąsiadujących ścianach. To, co w rezultacie dostaniemy, może nie być wielościanem, gdyż niedoszłe ściany mogą być „powyginane”. Okazuje się, że uzyskany szkielet można jednak „wyprostować”, otrzymując pełnoprawny wielościan \mathcal{W}' , który nazywamy *wielościanem dualnym* \mathcal{W} . Nietrudno przekonać się, że wielościan dualny ma tyle samo krawędzi co oryginalny, zaś liczba jego ścian jest równa liczbie wierzchołków wyjściowego (i vice versa). Ponadto wielościan dualny do dualnego jest (co do struktury) tożsamy z wyjściowym. W szczególności, wielościan dualny jednoznacznie wyznacza swój oryginał.

Wyobraźmy sobie teraz, że ściany danego wielościanu są przezroczyste, w odróżnieniu od jego krawędzi. Z jednej strony takiego wielościanu przykładamy źródło światła, a z drugiej kartkę. Jeśli odpowiednio przyłożymy źródło światła, cienie krawędzi nie będą się przecinać – uzyskamy w ten sposób *diagram Schlegela* wielościanu. Jeśli spojrzymy na diagram Schlegela jak na *graf*, czyli układ punktów (wierzchołków) połączonych kreskami (krawędziami), to będziemy mogli stwierdzić, że jest on grafem *planarnym*, czyli możliwym do narysowania bez przecinania krawędzi.

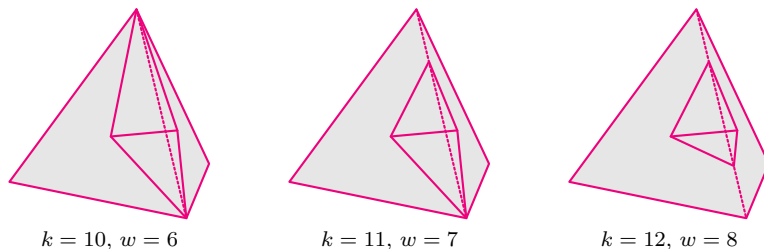
Diagram Schlegela ma jeszcze jedną własność – jest *grafem spójnym*, czyli poruszając się po jego krawędziach, można przemieścić się między dowolnymi jego wierzchołkami (bo tak też jest na wielościanie). Dla wielościanów wypukłych pozostaje to prawdą, nawet jeśli pozbedziemy się dowolnych dwóch wierzchołków wraz z wychodzącymi z nich krawędziami (szkic uzasadnienia na marginesie). Można równoważnie powiedzieć, że każde dwa wierzchołki są połączone co najmniej trzema ścieżkami, które – oprócz początku i końca – nie mają punktów wspólnych. Takie grafy nazywamy *trójspójnymi*.

Zgodnie z powyższymi obserwacjami diagramy Schlegela wielościanów dualnych do sześciścianów są planarnymi i trójspójnymi grafami o sześciu wierzchołkach. Na szczęście dla nas w publikacji [†] przedstawiono spis wszystkich 112 spójnych grafów o 6 wierzchołkach, z informacją (między innymi) o ich planarności i stopniu spójności. Ostatecznie zostajemy z siedmioma grafami:



Dowiedliśmy w ten sposób, że istnieje co najwyżej 7 sześciścianów – udało się nam zatem przedstawić wszystkie. Czytelnikowi Podejrzliwemu pozostawiamy sprawdzenie, czy przedstawione wyżej grafy faktycznie są diagramami Schlegela wielościanów dualnych do zaprezentowanych wcześniej sześciścianów. Zaznaczmy przy okazji, że trójspójność i planarność to wystarczające warunki, by dany graf mógł być „cieniem” jakiegoś wielościanu. Jest to głębokie twierdzenie udowodnione przez niemieckiego matematyka Ernsta Steinitza (1871–1928).

Na koniec wspomnijmy, że istnieją trzy typy niewypukłych sześciścianów, które można skonstruować poprzez odpowiednie wycięcie czworościanu z czworościanu.



Grafy tych wielościanów niewypukłych, a co za tym idzie także grafów ich wielościanów dualnych, nie są trójspójne. Tych wielościanów nie udało się zatem „uwypuklić” i są to przykłady istotnie różne od tych zaprezentowanych wcześniej.

Literatura

[†] Cvetković Dragoš i Milenko Petrić, „A table of connected graphs on six vertices”, *Discrete Mathematics* 50 (1984): 37–49.