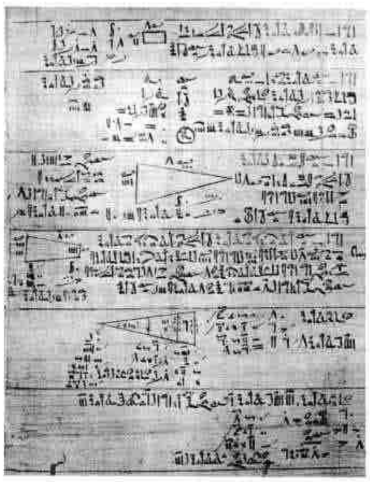
Równania różniczkowe jako hieroglify

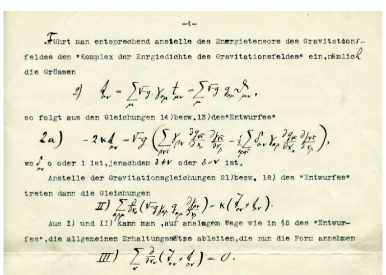
Jose A. LANGA, Grzegorz ŁUKASZEWICZ***

* Universidad de Sevilla
** Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Uniwersytet Warszawski

Rys. 1. Hieroglify na kamieniu z Rosetty w Egipcie (przewiezionym z Aleksandrii do Londynu w 1802 r.). Zostały rozszyfrowane dopiero w 1822 roku przez Jeana-Françoisa Champolliona



Rys. 2. Część papirusu matematycznego Rhinda. Jego nazwa pochodzi od Aleksandra Henry'ego Rhinda, szkockiego antykwariusza, który kupił papirus w 1858 roku w Luksorze w Egipcie



–4–

Führt man entsprechend anstelle des Energietensors des Gravitations-feldes den "Komplex der Enrgiedichte des Gravitationsfeldes" ein, nämlich die Grössen

2) $\mathfrak{t}_{\sigma\nu} = \sum_\mu \sqrt{-g}\,\gamma_{\sigma\mu} t_{\mu\nu} = \sum_\mu \sqrt{-g}\, g_{\sigma\mu}\vartheta_{\mu\nu}$,

so folgt aus den Gleichungen 14)bezw.13)des"Entwurfes"

2a) $-2\kappa\mathfrak{t}_{\sigma\nu} = \sqrt{-g}\left(\sum_{\beta\tau\rho}\gamma_{\beta\nu}\frac{\partial g_{\tau\rho}}{\partial x_\sigma}\frac{\partial\gamma_{\tau\rho}}{\partial x_\beta} - \frac{1}{2}\sum_{\alpha\beta\tau\rho}\delta_{\sigma\nu}\gamma_{\alpha\beta}\frac{\partial g_{\tau\rho}}{\partial x_\alpha}\frac{\partial \gamma_{\tau\rho}}{\partial x_\beta}\right)$,

wo $\delta_{\sigma\nu}$ o oder 1 ist, jenachdem $\sigma \neq \nu$ oder $\sigma = \nu$ ist.

Anstelle der Gravitationsgleichungen 21)bezw. 18) des "Entwurfes" treten dann die Gleichungen

II) $\sum_{\alpha\beta\mu}\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(\sqrt{-g}\,\gamma_{\alpha\beta}\, g_{\sigma\mu}\frac{\partial\gamma_{\mu\nu}}{\partial x_\beta}\right) = \kappa(\mathfrak{T}_{\sigma\nu}+\mathfrak{t}_{\sigma\nu})$.

Aus I) und II) kann man ,auf analogem Wege wie in §5 des "Entwurfes", die allgemeinen Erhaltungssätze ableiten, die nun die Form annehmen

III) $\sum_\nu \frac{\partial}{\partial x_\nu}(\mathfrak{T}_{\sigma\nu}+\mathfrak{t}_{\sigma\nu}) = 0$.

Rys. 3. Wyjątek z maszynowego rękopisu Alberta Einsteina i Marcela Grossmanna, opublikowanego w 1914 roku w *Zeitschrift für Mathematik und Physik*, przykład bardziej współczesnego matematycznego hieroglifu

W tym artykule zamierzamy przybliżyć bogactwo świata równań różniczkowych i związanych z nimi zagadnień w szerokim kontekście – obejmującym matematykę, fizykę i filozofię nauki – na przykładzie równania, które symbolicznie zapisujemy jako
$$\triangle u = f.$$

Za tym napisem kryją się całe misternie skonstruowane światy. Możemy go traktować jako hieroglif, który należy dopiero rozszyfrować, dokładnie tak samo jak to było z hieroglifami egipskimi na kamieniu z Rosetty (rys. 1). Podobnie każdy tekst matematyczny (rys. 2 i 3) musimy najpierw rozszyfrować, a potem zrozumieć na różnych poziomach (o czym pisaliśmy również w Δ^1_{22}).

Pierwsza rzecz to rozszyfrowanie znaczenia znaków $\triangle$, u, $=$ oraz f. Znak $=$ podpowiada, że napis $\triangle u = f$ wyraża równanie, a więc język tego napisu jest językiem matematyki, ale nie wiemy, jakie mają znaczenie symbole u, f oraz $\triangle u$. Które z tych obiektów oznaczają liczby, funkcje, a może jeszcze coś innego?

Rzeczywiście, interpretacji może być wiele. Skupmy się, zgodnie z porządkiem historycznym, na interpretacji klasycznej, gdzie u, f są funkcjami w przestrzeni euklidesowej jedno-, dwu- lub trójwymiarowej, a $\triangle$ oznacza operator różniczkowy. W przypadku dwuwymiarowym, czyli na płaszczyźnie, dla funkcji u i f dwóch zmiennych x_1, x_2, napis $\triangle u = f$ odczytujemy jako

$$\triangle u(x_1,x_2) = \frac{\partial^2 u(x_1,x_2)}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u(x_1,x_2)}{\partial x_2^2} = f(x_1,x_2), \tag{1}$$

gdzie $\frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$ oznacza drugą pochodną cząstkową po i-tej współrzędnej. (Pochodne cząstkowe można rozumieć jako „zwykłe" pochodne przy „zamrożeniu" wartości wszystkich zmiennych poza jedną, po której pochodna cząstkowa jest liczona).

No dobrze, ale o co nam chodzi, gdy piszemy równanie (1)? Równania różniczkowe rozumiemy podobnie jak równania algebraiczne. Na przykład, mając równanie $x^2 = a$, dla danej liczby a możemy zadać pytanie, czy istnieje liczba x, która to równanie spełnia, a jeśli tak – jak możliwie prosto przedstawić zbiór wszystkich takich liczb (tzn. zbiór rozwiązań). Liczba a może nie być sprecyzowana, jednak bywa, że nakładane są na nią pewne dodatkowe warunki (np. że jest liczbą dodatnią). Podobnie rozwiązań możemy chcieć szukać w jakimś określonym zbiorze, np. w zbiorze liczb wymiernych.

W przypadku naszego równania różniczkowego, analogicznie, dla danej ciągłej funkcji f należy znaleźć funkcję u mającą ciągłe pierwsze dwie pochodne i spełniającą równość (1) w każdym punkcie (x_1, x_2).

Podstawowe pytania w obu sytuacjach są te same.

(A) Czy dla wybranych danych (a czy f, odpowiednio) istnieje rozwiązanie (x czy u, odpowiednio) danego równania, a jeśli tak, to ile takich rozwiązań jest?

(B) Jakie są własności rozwiązań?

Wiemy, że w przypadku równania $x^2 = a$, gdy a jest liczbą dodatnią, to istnieją dwa rzeczywiste rozwiązania, symetryczne względem 0. Oznaczamy je jako $\sqrt{a}$ (dodatnie) oraz $-\sqrt{a}$. Dla $a = 0$ mamy jedno rozwiązanie: $x = 0$, a dla a ujemnych nie istnieje liczba rzeczywista x spełniająca równanie $x^2 = a$.

Zagadnienie jednowymiarowe. Zilustrujemy nasze pytania dotyczące istnienia i własności rozwiązań równania $\triangle u = f$ w najprostszym, jednowymiarowym przypadku. Nasze równanie przybiera wtedy postać

$$\frac{d^2 u(x)}{dx^2} = f. \tag{2}$$

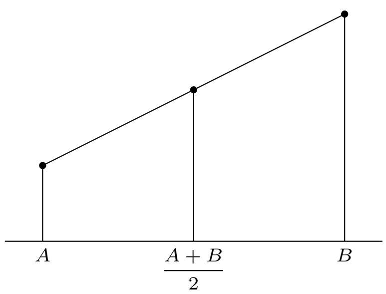
Weźmy $f = 0$. Jest to bardzo ważny przypadek, nazywany *jednorodnym*. Jeżeli

$$\frac{d^2 u(x)}{dx^2} = 0, \tag{3}$$

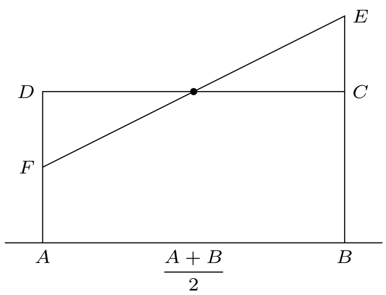
to nietrudno jest zobaczyć, że rozwiązania istnieją i mają postać

$$u(x) = ax + b,$$

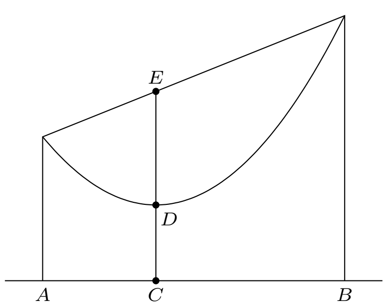
gdzie a i b mogą być dowolnymi liczbami rzeczywistymi. Zatem nasze równanie różniczkowe ma nieskończenie wiele rozwiązań, wykresami których są proste. Jest to odpowiedź na pytanie (A) o istnienie i liczbę rozwiązań.



Rys. 4. $u(\frac{A+B}{2}) = \frac{u(A)+u(B)}{2}$



Rys. 5. Pole prostokąta $ABCD$ jest równe polu trapezu $ABEF$



Rys. 6. Krzywa na odcinku $[A, B]$ leży pod swoją sieczną, $u(C) = D < E = \alpha u(A) + (1 - \alpha)u(B)$, gdzie $C = \alpha A + (1 - \alpha)B$

Czytelnikom, którzy nie znają pojęcia całki, może tu wystarczyć przyjęcie, że przez $\int_A^B f(x)dx$ rozumiemy pole pod wykresem funkcji f na odcinku $[A, B]$.

Do ważnych (i oczywistych) własności naszych rozwiązań, mających swoje naturalne (choć nieco mniej oczywiste) uogólnienia także w przypadku dwu- i trójwymiarowym, należą:

I. Dla dowolnego odcinka (A, B) rozwiązanie równania (3) przyjmuje swoje ekstrema, czyli wartości najmniejszą i największą, na jego końcach (tzn. na brzegu tego odcinka). Jeśli rozwiązanie nie jest funkcją stałą, to wartości ekstremalne są przyjmowane *wyłącznie* na krańcach odcinka.

II. Dla dowolnego odcinka (A, B) rozwiązanie równania (3) w środku tego odcinka przyjmuje wartość równą średniej z wartości przyjmowanych na brzegach odcinka, czyli $u(\frac{A+B}{2}) = \frac{u(A)+u(B)}{2}$ (rys. 4).

III. Dla dowolnego odcinka (A, B) rozwiązanie równania (3) w środku tego odcinka przyjmuje wartość średnią *na tym odcinku*, co znaczy, że pole pod wykresem rozwiązania na odcinku (A, B) jest równe polu prostokąta o podstawie $B - A$ i wysokości $u(\frac{A+B}{2})$ (rys. 5).

Rozważymy teraz prosty przykład równania *niejednorodnego*,

$$\frac{d^2u(x)}{dx^2} = 2 \quad \text{lub} \quad u''(x) = 2.$$

Z powyższego równania widzimy, że druga pochodna funkcji u jest dodatnia, a więc pierwsza pochodna jest funkcją rosnącą, w konsekwencji funkcja u jest ściśle wypukła, czyli na każdym odcinku (A, B) leży poniżej swojej siecznej na tym odcinku, co opisuje warunek $u(\alpha A + (1 - \alpha)B) < \alpha u(A) + (1 - \alpha)u(B)$ dla każdej liczby α z przedziału $(0, 1)$. W naszym przypadku $u(x) = x^2 + bx + c$ (rys. 6).

Wymienione powyżej własności II i III mają swoje uogólnienia dla rozważanego równania niejednorodnego. Wyglądają one następująco:

$$\frac{u(p+h) + u(p-h)}{2} = u(p) + \frac{1}{2}u''(p)h^2 \tag{4}$$

oraz

$$\frac{1}{2h} \int_{p-h}^{p+h} u(r)dr = u(p) + \frac{1}{6}u''(p)h^2 \tag{5}$$

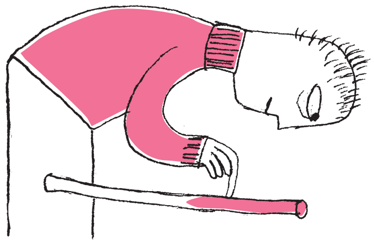
dla dowolnego ustalonego punktu p. W szczególności, gdy funkcja u spełnia równanie $u''(x) = 0$, otrzymujemy własności II i III, a w ogólniejszym przypadku powyższe wzory mówią nam, że operator $\frac{d^2}{dx^2}$ mierzy odchylenie wartości funkcji w danym punkcie p od wartości średnich, zdefiniowanych przez lewe strony równań (4) i (5) odpowiednio, na zawierającym go przedziale $(p - h, p + h)$.

Jak to wygląda od strony fizyki? Spójrzmy teraz na równania (2) i (3) od strony fizyki, a obraz nam się rozjaśni.

Równanie (3) opisuje następującą sytuację fizyczną. Załóżmy, że mamy pręt (obiekt jednowymiarowy) o długości $B - A$, na którego końcach A, B utrzymujemy stałą temperaturę $u(A)$ i $u(B)$. Pytamy o temperaturę $u(x)$ w każdym wewnętrznym punkcie pręta. Po bardzo długim czasie od początku eksperymentu rozkład temperatury w pręcie powinien się ustalić do funkcji spełniającej równanie (3), a więc do funkcji liniowej łączącej punkty $(A, u(A))$ i $(B, u(B))$.

Jeżeli natomiast w punkcie p we wnętrzu obszaru znajduje się źródło ciepła (co odpowiada temu, że $f(p) < 0$), to temperatura w punkcie p będzie większa niż średnia temperatura w jego otoczeniu. Taką sytuację opisuje równanie (2).

W świetle tej interpretacji własności I, II i III oraz wzory (4), (5) stają się zrozumiałe.



Zagadnienie brzegowe a zagadnienie początkowe. Poszukiwanie granicznego rozkładu temperatury w pręcie możemy przedstawić w postaci następującego *zagadnienia brzegowego:*

$$(6) \qquad \frac{d^2u(x)}{dx^2} = f(x), \quad A < x < B, \qquad u(A) = u_A, \quad u(B) = u_B.$$

Szukamy tu funkcji $u(x)$ określonej na odcinku $[A, B]$, spełniającej równanie różniczkowe wewnątrz tego odcinka i powyższe warunki na jego brzegach, dla ustalonych liczb u_A i u_B.

Równanie (6) jest równaniem należącym do *mechaniki klasycznej* w przebraniu, ponieważ równanie

$$(7) \qquad m\frac{d^2x(t)}{dt^2} = f(x(t)), \quad A < t < B, \qquad x(A) = x_A, \quad x(B) = x_B$$

opisuje ruch ciała o masie m w polu sił f, w przedziale czasu $A < t < B$, z zadanymi położeniami początkowym x_A oraz końcowym x_B.

W mechanice klasycznej Newtona równanie (7) uzupełnione jest zwykle podaniem warunków początkowych postaci $x(A) = x_A$, $\frac{dx}{dt}(A) = v_A$, to znaczy podaniem położenia i prędkości ciała w chwili A. Otrzymujemy wtedy zagadnienie *początkowe:*

$$(8) \qquad m\frac{d^2x(t)}{dt^2} = f(x(t)), \quad A < t < B, \qquad x(A) = x_A, \quad \frac{dx}{dt}(A) = v_A.$$

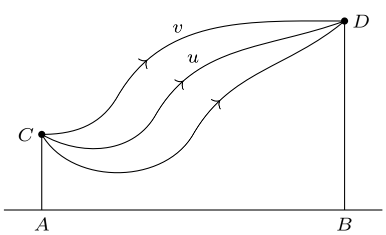
Zagadnienie *początkowe* zgodne jest z *zasadą przyczynowości* w fizyce, która mówi, że *przyczyna zawsze poprzedza skutek*. Mając prawo ruchu i *warunki początkowe* w chwili A, chcemy wyznaczyć trajektorię ruchu $x(t)$ na przedziale (A, B).

Warto zauważyć, że równanie Newtona jest odwracalne w czasie, tzn. nie zmienia się, gdy odwrócimy czas, z t na $-t$. Aby się o tym przekonać, rozważmy razem z problemem (8) problem

$$m\frac{d^2\hat{x}(t)}{dt^2} = f(\hat{x}(t)), \quad A < t < B, \qquad \hat{x}(A) = x(B), \quad \frac{d\hat{x}}{dt}(A) = -\frac{dx(B)}{dt},$$

którego rozwiązanie $\hat{x}(t) = x(A + B - t)$ jest wyznaczone na przedziale (A, B). Opisuje ono tę samą drogę, tylko w odwrotnym kierunku i z wektorami prędkości przeciwnie skierowanymi.

Tkwi w tym pewien dylemat opisu rzeczywistości, dotyczący fundamentalnych problemów fizyki: strzałki czasu, procesów nieodwracalnych, demona Maxwella i rosnącej entropii. Wiele razy chcielibyśmy odwrócić czas tylko na chwilę, „puścić film do tyłu”, aby rozbity wazon w całości wrócił na swoje miejsce... Jest to praktycznie niemożliwe, ale równania Newtona o tym nie mówią.



Rys. 7. Trzy różne krzywe określone na przedziale $A < x < B$, łączące punkty $C = u(A) = u_A$, $D = u(B) = u_B$

Sformułowanie wariacyjne i jego interpretacje. Zagadnienie *brzegowe* (6) możemy interpretować następująco. Mamy prawo ruchu i zadane dwa punkty (A, u_A) i (B, u_B) w przestrzeni (x, u). Chcemy wyznaczyć trajektorię $u(x)$ spełniającą równanie różniczkowe (6) i łączącą te punkty, tzn. aby $u(A) = u_A$ i $u(B) = u_B$, $A \leqslant x \leqslant B$ (rys. 7).

Okazuje się, że rozwiązanie u zagadnienia (6) minimalizuje wyrażenie

$$F(u) = \int_A^B \frac{1}{2}\left|\frac{du(x)}{dx}\right|^2 dx + \int_A^B f(x)u(x)dx.$$

Oznacza to, że dla wszystkich funkcji $v(x)$ spełniających warunki brzegowe $v(A) = u_A, v(B) = u_B$ na końcach przedziału (A, B)

$$F(v) \geqslant F(u),$$

gdzie funkcja $u(x)$ jest rozwiązaniem zagadnienia (6).

Odpowiedzi do wyzwań z końca artykułu *Byle nie dodawać* (s. 12)

1. $P(n)$
2. $P_4(n)$
3. $P_5(n)$
4. $2T(n)$
5. $\frac{1}{2}P(2n) - T(n)$ albo $T(2n) - 4P(n) + T(n)$

Rozważmy szkolne zadanie ruchu w pionie w polu grawitacyjnym Ziemi (np. badamy ruch podrzuconej piłki). Jeśli oś Ox jest skierowana do góry, to funkcję f reprezentuje liczba $-mg$, gdzie g jest stałą grawitacji.

Z tego, co powiedzieliśmy wyżej, trajektoria ruchu minimalizuje wyrażenie

$$F(x) = \int_A^B \frac{m}{2}\left|\frac{dx(t)}{dt}\right|^2 dt - \int_A^B mgx(t)dt = \int_A^B \left\{\frac{m}{2}\left|\frac{dx(t)}{dt}\right|^2 - mgx(t)\right\}dt,$$

gdzie $\frac{m}{2}|\frac{dx(t)}{dt}|^2$ jest energią kinetyczną, a mgx energią potencjalną poruszającego się ciała.

Jeśli $g = 0$, to ruch od punktu x_A do punktu x_B odbywa się po prostej łączącej te punkty ze stałą prędkością, co jest zgodne z pierwszym prawem Newtona mówiącym, że *każdy obiekt pozostanie w spoczynku lub w ruchu jednostajnym po linii prostej, chyba że zostanie zmuszony do zmiany swojego stanu przez działanie siły zewnętrznej.* Ta tendencja do przeciwstawiania się zmianom stanu ruchu nazywana jest *bezwładnością*, a prawo to jest również nazywane *prawem bezwładności*.

W świetle powyższego zauważmy, że drugą zasadę ruchu w mechanice Newtona można sformułować jako zasadę najmniejszego działania: *średnia energia kinetyczna pomniejszona o średnią energię potencjalną jest możliwie najmniejsza na drodze obiektu biegnącego z jednego punktu do drugiego.*

W szczególności pierwsza i druga zasada ruchu wynikają z zasady najmniejszego działania.

Zauważmy coś dziwnego. Zasada najmniejszego działania głosi w szczególności, że wybór punktu początkowego $x(A) = x_A$ i docelowego $x(B) = x_B$ wyznacza drogę ciała w przedziale czasu (A, B). Wydaje się, że jest to sprzeczne z prawem przyczynowości.

Kiedy znajdziemy $x(t)$ rozwiązujące problem (7), obliczymy wyrażenie $\frac{dx}{dt}(A) = v_A$, a następnie rozwiążemy problem (8), to rozwiązanie drugiego problemu będzie pokrywać się z rozwiązaniem pierwszego. Możemy o tym myśleć w następujący sposób: wybór punktu docelowego x_B w chwili B wyznacza właściwą prędkość v_A we wcześniejszej chwili A.

Istotnie, tkwi tu pewna tajemnica – w jaki sposób ciało „wybiera” rzeczywistą ścieżkę spośród wszystkich możliwości ruchu lub dlaczego rzeczywista historia wymaga minimalnego działania.

Z drugiej strony możemy uznać za rzecz naturalną owo *nieprzyczynowe* wyjaśnienie praw mechaniki i nazwać je wyjaśnieniem *poprzez więzy* [Mrówczyński, 1991], [Lange, 2017], [Glick, 2023]. Należy pamiętać, że zasada przyczynowości nie jest jakąś prawdą absolutną, a zaledwie użytecznym paradygmatem, od dawna uważanym za tajemniczy i zagadkowy – samo zdefiniowanie pojęcia „przyczyny” sprawia trudności – a obecnie coraz bardziej uwierającym w fizyce.

Wielki Projektant może tu np. uosabiać arystotelesowską metafizyczną *pierwszą przyczynę*, w odróżnieniu od *przyczyny wtórnej*, fizycznej. Różnice między nimi pięknie ilustruje następująca historyjka. Mama dała córce chleb, aby poszła nakarmić rybki w stawie. Rybki *widziały*, jak dziewczynka wrzuca okruchy do wody, *ale nie mogły wiedzieć*, że zostały nakarmione na prośbę jej matki. Pytanie: kto nakarmił rybki? Czy możemy być pewni, że sami nie znajdujemy się w położeniu rybek?

Problem *zasady najmniejszego działania* (w fizyce i nie tylko tam) był i wciąż jest dyskutowany przez najwybitniejszych uczonych i filozofów. Matematyk może powiedzieć, że sformułowanie wariacyjne jest tylko jednym z równoważnych sformułowań praw dynamiki, fizyk może bronić zasady najmniejszego działania, np. podając jej wyjaśnienia na gruncie fizyki kwantowej, inni widzą w niej niezbadane jeszcze prawa *ekonomii przyrody* czy *celowości przyrody* lub kryjącego się za nią Wielkiego Projektanta.

Artykuł rozpoczęliśmy od przedstawienia prostego hieroglifu $\triangle u = f$ ukrywającego w sobie równanie różniczkowe. Ledwie tylko wniknąwszy w jego głąb, napotkaliśmy zagadnienia należące do trzech dziedzin: matematyki, fizyki i filozofii nauki. Nasz hieroglif naprowadził nas na pytania dotyczące ich interpretacji i wzajemnych powiązań, inspirując do poszerzenia spojrzenia i dalszych poszukiwań, albowiem: *Więcej jest rzeczy na niebie i na ziemi, Horacy, niż te wyobrażalne w twojej filozofii.*

Literatura

[Glick, 2023] David Glick, *The principle of least action and teleological explanation in physics*, Synthese (2023) 202:25, 1–15.

[Lange, 2017] Marc Lange, *Because Without Cause. Non-Causal Explanations in Science and Mathematics*, OUP, 2017.

[Mrówczyński, 1991] Stanisław Mrówczyński, *Teleologia i determinizm*, Delta nr 11, 1991.