Tożsamości algebraiczne

Bartłomiej BZDĘGA Uniwersytet im. A. Mickiewicza w Poznaniu

Tożsamość algebraiczna to równość dwóch wyrażeń algebraicznych. Najbardziej znanymi przykładami tożsamości algebraicznych są wzory skróconego mnożenia. O pewnych szczególnych tożsamościach algebraicznych, związanych z sumą trzech sześcianów, pisałem już w kąciku nr 13 w Δ^1_{20}.

Znanymi przykładami są również: tożsamość Diofantosa (znana też jako tożsamość Brahmagupty–Fibonacciego)

$$(a^2+b^2)(c^2+d^2) = (ac+bd)^2 + (ad-bc)^2$$

oraz tożsamość Sophie Germain

$$x^4+4y^4 = (x^2-2xy+2y^2)(x^2+2xy+2y^2).$$

Obu tym tożsamościom poświęcono artykuły w gazetce *Kwadrat*, w numerach, odpowiednio, 2 i 16.

W niektórych zadaniach, jakie tu przedstawiam, wystarczy skorzystać z gotowej, mniej lub bardziej znanej tożsamości. W innych – trzeba taką tożsamość odkryć.

Przykład 1. Liczby wymierne $x, y, z \neq 0$ spełniają równość $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=0$. Wykazać, że $x^2+y^2+z^2$ jest kwadratem liczby wymiernej.

Rozwiązanie. Mnożąc równość $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=0$ przez xyz, otrzymujemy $xy+yz+zx=0$. W takim razie

$$x^2+y^2+z^2 = x^2+y^2+z^2+2xy+2yz+2zx = (x+y+z)^2.$$

Przykład 2. Dowieść, że iloczyn czterech kolejnych liczb całkowitych powiększony o 1 jest kwadratem liczby całkowitej.

Rozwiązanie. Chcemy udowodnić, że dla pewnego całkowitego k zachodzi równość

$$n(n+1)(n+2)(n+3)+1 = k^2.$$

Ponieważ $k^2-1=(k-1)(k+1)$, musimy zapisać $n(n+1)(n+2)(n+3)$ jako iloczyn dwóch liczb różniących się o 2. Po chwili odkrywamy, że $n(n+3)=n^2+3n$ oraz $(n+1)(n+2)=n^2+3n+2$.

Zadania

1. Dane są takie liczby rzeczywiste x i y, że liczby $x+y$ i x^2+y^2 są wymierne. Udowodnić, że dla każdego całkowitego dodatniego n liczba x^n+y^n jest wymierna.
2. Liczby rzeczywiste x, y, z spełniają równość $xy^2+yz^2+zx^2=x^2y+y^2z+z^2x$. Wykazać, że pewne dwie spośród liczb x, y, z są równe.
3. Niech a, b, c będą trzema różnymi liczbami rzeczywistymi. Wykazać, że jeśli pewne dwie spośród liczb
$$\frac{a+b}{a^2+ab+b^2},\quad \frac{b+c}{b^2+bc+c^2},\quad \frac{c+a}{c^2+ca+a^2}$$
są równe, to wszystkie te trzy liczby są równe (68 OM).
4. Liczby całkowite a, b, c mają sumę równą 0. Udowodnić, że $5abc \mid a^5+b^5+c^5$.
5. Dane są liczby całkowite a, b, c oraz liczba pierwsza $p\neq 5$, dzieląca $a+b+c$ oraz $a^5+b^5+c^5$. Udowodnić, że co najmniej jedna z liczb: $a^2+b^2+c^2$ lub $a^3+b^3+c^3$ dzieli się przez p (61 OM).
6. Niech $n\geqslant 2$ będzie liczbą całkowitą dodatnią. Udowodnić, że $2^{4n+2}+1=abc$ dla pewnych liczb naturalnych $a, b, c>1$.
7. Niech $a_1<a_2<\ldots<a_n$ oraz
$$\frac{1}{(x+a_1)(x+a_2)\ldots(x+a_n)} = \frac{A_1}{x+a_1}+\frac{A_2}{x+a_2}+\ldots+\frac{A_n}{x+a_n}.$$
Dowieść, że liczby $A_1, A_2, \ldots, A_n$ są kolejno, na zmianę, dodatnie i ujemne.

Wskazówki

1. $x^{n+1}+y^{n+1} = (x+y)(x^n+y^n)-xy(x^{n-1}+y^{n-1})$.
2. $xy^2+yz^2+zx^2-x^2y-y^2z-z^2x = (x-y)(y-z)(z-x)$.
3. $\dfrac{a+b}{a^2+ab+b^2}=\dfrac{a^2-b^2}{a^3-b^3}$, podobnie pozostałe. Teraz wystarczy skorzystać z faktu, że jeśli $\dfrac{x_1}{y_1}=\dfrac{x_2}{y_2}=z$, to $\dfrac{x_1+x_2}{y_1+y_2}=z$.
4. $a^5+b^5-(a+b)^5 = -5ab(a+b)(a^2+ab+b^2)$.
5. $5(a^2+b^2+c^2)(a^3+b^3+c^3) = 6(a^5+b^5+c^5) - (a^3+b^3+c^3-2a^2b-2ab^2-2b^2c-2bc^2-2c^2a-2ca^2+6abc)(a+b+c)^2$
6. Wykazać, np. za pomocą kongruencji, że $5 \mid 2^{4n+2}+1$. Ponadto $2^{4n+2}+1=1^4+4(2^n)^4$, więc można użyć tożsamości Sophie Germain.
7. Można użyć indukcji oraz równości $\dfrac{1}{(x+a_1)\ldots(x+a_{n-1})}-\dfrac{1}{(x+a_2)\ldots(x+a_n)}=\dfrac{a_n-a_1}{(x+a_1)(x+a_2)\ldots(x+a_n)}$.