46. Konkurs Uczniowskich Prac z Matematyki im. Pawła Domańskiego

12 września 2024 roku, podczas odbywającego się we Wrocławiu 9. Kongresu Młodych Matematyków Polskich, miał miejsce finał 46. Konkursu Uczniowskich Prac z Matematyki im. Pawła Domańskiego. Na tegoroczny Konkurs wpłynęło 12 prac, z których 5 dostało się do finału. Po wysłuchaniu finałowych prezentacji i dyskusji Jury postanowiło nagrodzić wszystkie prace finałowe.

Złote medale i nagrody w wysokości po 1600 złotych otrzymali:

- Antoni Łuczak, uczeń XIV LO im. Stanisława Staszica w Warszawie, autor pracy *O Krzywych Apoloniusza w Trójkącie*, napisanej pod opieką Dominika Burka,
- Miłosz Płatek, uczeń V LO im. Augusta Witkowskiego w Krakowie, autor pracy *N_aG_eL i okręgi z nimi związane*, napisanej pod opieką Dominika Burka.

Brązowe medale i nagrody w wysokości po 800 złotych otrzymali:

- Kazimierz Chomicz, uczeń I LO im. Bolesława Chrobrego w Piotrkowie Trybunalskim, autor pracy *Dowód i zastosowania własności hiperboli prostokątnych*, napisanej pod opieką Pawła Kwiatkowskiego,
- Anna Koziara, uczennica XIV LO im. Stanisława Staszica w Warszawie, autorka pracy *O pewnym zastosowaniu punktów izogonalnie sprzężonych w czworościanie*, napisanej pod opieką Dominika Burka,
- Adam Mariusz Lubiński, uczeń II LO im. Marii Skłodowskiej-Curie w Gorzowie Wielkopolskim, autor pracy *O weryfikacji tautologii logicznych przy użyciu przekształceń algebraicznych.*

Kazimierz Chomicz przedstawił nowe, prostsze i elegantsze od dotychczas znanych, dowody kilku twierdzeń dotyczących hiperboli prostokątnych (o prostopadłych asymptotach) przechodzących przez wierzchołki ustalonego trójkąta ABC. Jedno z nich mówi, że jeśli $\mathcal{H}$ jest taką hiperbolą oraz $P \in \mathcal{H}$, to środek symetrii hiperboli $\mathcal{H}$ oraz rzuty prostokątne punktu P na proste zawierające boki trójkąta ABC leżą na jednym okręgu. Inne mówi, że wierzchołki trójkąta ABC, jego ortocentrum, środek okręgu opisanego i punkt Nagela leżą na jednej hiperboli prostokątnej, której środek symetrii leży zarówno na okręgu wpisanym w ten trójkąt, jak i na jego okręgu dziewięciu punktów. Podobnych, równie ciekawych wyników jest w pracy więcej.

Anna Koziara w swojej pracy dowodzi, że dla czworościanów równościennych (mających ściany o równych polach) nie zachodzi trójwymiarowy odpowiednik twierdzenia o prostej Simpsona. Dokładniej, jeśli $P \notin \{A, B, C, D\}$ jest punktem leżącym na sferze opisanej na czworościanie równościennym $ABCD$, to rzuty prostokątne punktu P na płaszczyzny zawierające ściany czworościanu nie leżą na jednej płaszczyźnie. Autorka pokazała w tym celu, że rzuty punktu P niebędącego wierzchołkiem czworościanu $ABCD$ na jego ściany leżą na jednej płaszczyźnie wtedy i tylko wtedy, gdy sprzężenie izogonalne P^* punktu P względem czworościanu $ABCD$ jest punktem w nieskończoności. Jeśli zaś $ABCD$ jest czworościanem równościennym, to dla każdego punktu $P \notin \{A, B, C, D\}$ leżącego na sferze opisanej na czworościanie $ABCD$ jego sprzężenie izogonalne P^* również leży na tej sferze, a więc nie jest punktem w nieskończoności.

Adam Lubiński pokazał, jak używając wielomianów wielu zmiennych, można badać, czy dane wyrażenie w rachunku zdań jest tautologią. Załóżmy, że dane jest wyrażenie, w którym zmienne zdaniowe są połączone spójnikami logicznymi, np. $((p \Rightarrow q) \wedge \neg q) \Rightarrow \neg p$. Czy jest ono tautologią? Czy opisane przez nie zdanie ma wartość logiczną *prawda* dla każdego przypisania wartości logicznych zmiennym zdaniowym w nim występującym? Autor przedstawił pewien sposób przypisania każdemu wyrażeniu rachunku zdań, w którym występuje k zmiennych zdaniowych, wielomianu k zmiennych. Okazuje się, że badane wyrażenie jest tautologią wtedy i tylko wtedy, gdy odpowiadający mu wielomian można uprościć do wielomianu tożsamościowo równego 1, wykorzystując algebraiczne operacje na wielomianach i utożsamienia $x^2 = x$ dla każdej zmiennej x.

Antoni Łuczak badał miejsca geometryczne takich punktów P, że $\sphericalangle APB = \sphericalangle CPD$, gdzie A, B, C, D to ustalone punkty płaszczyzny, zaś wszystkie rozważane kąty są skierowanymi kątami między prostymi (a nie półprostymi). Gdy $A, B = C$ i D są różne i współliniowe, wówczas uzyskany zbiór jest sumą prostej i okręgu Apoloniusza dla punktów B i D. Autor badał przypadek, gdy wszystkie cztery punkty są parami różne, punkty B, D i C leżą (w tej kolejności) na jednej prostej, zaś punkt A poza nią. Wówczas możliwe położenia punktu P tworzą krzywą algebraiczną stopnia 3. Autor udowodnił cały szereg własności takich krzywych, wykorzystując szeroki wachlarz narzędzi geometrycznych, algebraicznych i analitycznych.

Miłosz Płatek rozważał trójkąt ABC i szóstki punktów, po dwa leżące na każdej z prostych zawierających boki trójkąta, i badał, kiedy cała szóstka leży na jednym okręgu. Pochodzenie rozważanych szóstek punktów było różne i obejmowało zarówno przypadki znane w literaturze, jak i nowe. Przykład: niech P będzie punktem wewnątrz trójkąta. Dla każdego boku rozważamy punkty jego przecięcia z okręgiem przechodzącym przez P i stycznym do pozostałych dwóch boków. Otrzymamy sześć punktów leżących na jednym okręgu wtedy i tylko wtedy, gdy P jest punktem Gergonne'a lub punktem Nagela rozważanego trójkąta.

Prace finalistów można znaleźć na stronie `deltami.edu.pl/konkurs-prac-uczniowskich/lista-laureatow/`.

Andrzej KOMISARSKI
przewodniczący Jury Konkursu