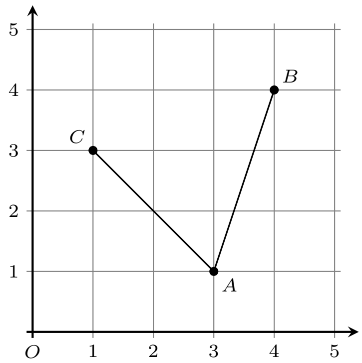
Kilku muszkieterów

*Mariusz SKAŁBA**

* Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Uniwersytet Warszawski

Poprzednie części trylogii to: K. Łyczek, *Widoczność w nieskończonym lesie* (Δ^4_{20}), K. Łyczek, M. Skałba, *Nigdy Cię nie zobaczę* (Δ^{12}_{20}).

Ten artykuł jest niezamierzoną trzecią częścią mimowolnej trylogii o punktach kratowych. Jak wiadomo, muszkieterowie, aby dobrze współdziałać, muszą się wzajemnie bacznie i nieustannie obserwować. Żyją oni na kracie całkowitoliczbowej w punktach $(m_1^{(j)}, m_2^{(j)})$ dla $j = 1, 2, \ldots, k$, gdzie $k \geqslant 2$ jest liczbą muszkieterów. Muszkieterowie o numerach j_1, j_2 widzą się wtedy i tylko wtedy, gdy na odcinku między nimi nie ma żadnego punktu kratowego (rys. 1), to znaczy, gdy $\mathrm{NWD}(m_1^{(j_2)} - m_1^{(j_1)}, m_2^{(j_2)} - m_2^{(j_1)}) = 1$. Dla $k = 2$ możemy mówić o muszkieterze i muszkieterce, co czyni całą sytuację dodatkowo romantyczną.



Rys. 1. Muszkieter A widzi muszkietera B, jednak nie widzi muszkietera C, gdyż przeszkadza mu w tym punkt $(2, 2)$

W artykule *Nigdy Cię nie zobaczę* (Δ^{12}_{20}) rozpatrzyliśmy dokładnie ten przypadek i naszkicowaliśmy rozumowanie prowadzące do obliczenia liczby $6/\pi^2$ jako prawdopodobieństwa (jakże pozytywnego!) zdarzenia, że nasi bohaterowie mają kontakt wzrokowy.

Wykażemy teraz, że nie może być pięciu muszkieterów. (Zrobimy to tylko dlatego, że jesteśmy matematykami i nie możemy żyć bez *wykazywania*, bo czy ktoś słyszał w ogóle o pięciu muszkieterach?) Załóżmy, że dla $j = 1, 2, 3, 4, 5$ dany jest punkt $(m_1^{(j)}, m_2^{(j)}) \in \mathbb{Z}^2$. Każdej liczbie całkowitej m przyporządkujmy resztę 0, gdy m jest parzysta, albo resztę 1, gdy m jest nieparzysta. Ponieważ są cztery możliwe pary reszt, więc istnieją $j_1 \neq j_2$ takie, że odpowiadają im te same układy reszt. Zatem obie liczby $m_1^{(j_2)} - m_1^{(j_1)}, m_2^{(j_2)} - m_2^{(j_1)}$ są parzyste, czyli osoby j_1 oraz j_2 nie widzą się.

Czytelnicy, którzy wprowadzone nazwy punktów uznają za nienaturalne, zdecydowanie powinni uzupełnić swoją wiedzę na temat muszkieterów.

Teraz rozważymy ważny literacko przypadek $k = 4$. Jakie jest prawdopodobieństwo, że każdy z muszkieterów ma na oku wszystkich pozostałych? Możemy założyć, że $DAR = (0, 0)$, natomiast AT, PO, AR to trzy losowe punkty $(m_1^{(j)}, m_2^{(j)}) \in \mathbb{Z}^2$ dla $j = 1, 2, 3$. Jeśli wszyscy się widzą, to dla każdej liczby pierwszej p żaden z wektorów:

$$(m_1^{(1)}, m_2^{(1)}), (m_1^{(2)}, m_2^{(2)}), (m_1^{(3)}, m_2^{(3)}),$$
$$(m_1^{(2)} - m_1^{(1)}, m_2^{(2)} - m_2^{(1)}), (m_1^{(3)} - m_1^{(2)}, m_2^{(3)} - m_2^{(2)}), (m_1^{(3)} - m_1^{(1)}, m_2^{(3)} - m_2^{(1)})$$

nie składa się z obu liczb podzielnych przez p (gdyż wtedy odpowiedni największy wspólny dzielnik byłby $\geqslant p$). Oznacza to dokładnie tyle, że wektory

$$(m_1^{(1)}, m_2^{(1)}), (m_1^{(2)}, m_2^{(2)}), (m_1^{(3)}, m_2^{(3)})$$

są różne od $(0, 0)$ mod p oraz są parami różne mod p. Zatem dla ustalonej liczby pierwszej p rzeczone prawdopodobieństwo, że wszyscy się „p-widzą", wynosi

$$\frac{(p^2-1)(p^2-2)(p^2-3)}{p^6}.$$

Ponieważ dla różnych p te zdarzenia są jakby niezależne (choć nie potrafimy tego sformalizować dla żadnej liczby muszkieterów > 2), więc prawdopodobieństwo, że wszyscy się widzą, powinno wynosić tyle:

$$\prod_p \frac{(p^2-1)(p^2-2)(p^2-3)}{p^6} \approx 0{,}0246,$$

Dla $k = 2$ w kwestii wspomnianej niezależności odsyłamy jeszcze raz do artykułu w Δ^{12}_{20}, a po ścisłe obliczenie prawdopodobieństwa do książki T.M. Apostola, *Introduction to Analytic Number Theory*, str. 62–64.

gdzie iloczyn nieskończony jest po wszystkich liczbach pierwszych p, a przedstawiona przybliżona wartość została wyznaczona na podstawie początkowych 10^4 liczb pierwszych. Użyliśmy programu Mathematica do wygenerowania 10^6 czworokątów, przy czym każdorazowo $m_k^{(j)}$ dla $k = 1, 2$; $j = 1, 2, 3$ jest wybierana z rozkładu jednostajnego na zbiorze $\{1, 2, 3, \ldots, 10^6\}$. Wypadło 24 862 czworokątów takich, że wszyscy się widzą.

Dla Czytelników, którym nieobca jest algebra liniowa, zaznaczmy jeszcze, że każda macierz M wymiaru 2×2 o wyrazach całkowitych i wyznaczniku 1 opisuje pewien układ czterech muszkieterów, którzy się wzajemnie widzą. Jeśli bowiem $k_1, k_2 \in \mathbb{Z}^2$ są kolumnami macierzy M, to możemy przyjąć:

$$DAR = (0, 0), \quad AT = k_1, \quad PO = k_2, \quad AR = k_1 + k_2.$$

Z warunku $\det M = 1$ oraz podstawowych własności wyznaczników wynika, że odpowiednie NWD są równe 1.

Odnośnie prawdopodobieństwa, że losowy układ trzech punktów kratowych to trzej muszkieterowie, to podobnie jak dla $k = 4$ przewidujemy, że wynosi ono

$$\prod_p \frac{(p^2-1)(p^2-2)}{p^4} \approx 0{,}196,$$

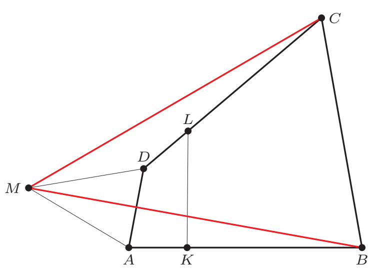
i znowu eksperymenty numeryczne to potwierdzają. Nie potrafimy jednak udowodnić nawet tego, że dla $k = 3, 4$ rzeczone prawdopodobieństwa istnieją.

W 1906 roku Sierpiński ulepszył jako pierwszy oszacowanie Gaussa na liczbę $N(R)$ punktów kratowych w kole $x^2 + y^2 \leqslant R^2$: $|N(R) - \pi R^2| < CR^{2/3}$, gdzie C jest stałą dodatnią. W oszacowaniu Gaussa występował wykładnik 1 zamiast 2/3.

To, że w pozornie nieskomplikowanym świecie $\mathbb{Z}^2$ dzieje się wiele ciekawych rzeczy, zauważył już klasyk gatunku Wacław Sierpiński w swojej popularnej książeczce *O stu prostych, ale trudnych zagadnieniach arytmetyki. Z pogranicza geometrii i arytmetyki* (Warszawa 1959). Nasza skromna kontrybucja jest zaledwie wyrazem szczerego zachwytu i fascynacji.

Zadania

Przygotował Dominik BUREK

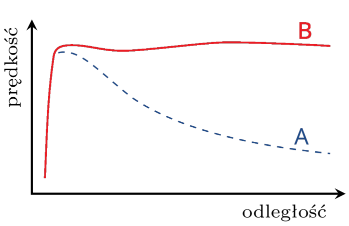


M 1801. Dany jest czworokąt wypukły $ABCD$, w którym $AB = BC = CD = 4$. Punkty K i L są wybrane, odpowiednio, na bokach AB i CD tak, że $AK = DL = 1$. Trójkąt AMD jest zbudowany na boku AD na zewnątrz czworokąta, a ponadto $AM = MD = 2$. Załóżmy, że $KL = 2$. Udowodnić, że $BM = CM$.

M 1802. Komórki tabeli $n \times n$ są wypełnione znakami „+" i „−". Podczas ruchu można zmienić wszystkie znaki w dowolnym wierszu lub kolumnie na przeciwne. Wiadomo, że startując z początkowego układu, można w skończenie wielu ruchach zamienić wszystkie znaki w tabeli na plusy. Udowodnić, że można to osiągnąć, wykonując nie więcej niż n ruchów.

M 1803. Liczbę całkowitą dodatnią nazwiemy *prawie kwadratem,* jeśli można ją przedstawić jako iloczyn dwóch liczb, które różnią się nie więcej niż o 1% większej z nich. Udowodnić, że istnieje nieskończenie wiele czwórek kolejnych liczb naturalnych będących prawie kwadratami.

Przygotował Andrzej MAJHOFER



Krzywa rotacji typowej galaktyki spiralnej: (A) obliczona na podstawie obserwacji mas widocznych gwiazd, (B) obserwowana.

F 1109. Krzywą rotacji galaktyki nazywany jest wykres zależności orbitalnych prędkości, v, widocznych gwiazd od ich odległości, r, od centrum galaktyki. Obserwowane zależności odbiegają od obliczonych na podstawie rozkładu mas widocznych gwiazd w galaktyce (rysunek). Dla wyjaśnienia tej rozbieżności przyjmuje się istnienie wewnątrz i wokół galaktyk niewidocznej tzw. ciemnej materii. Jak gęstość, ρ, ciemnej materii powinna zmieniać się z odległością, r, od centrum galaktyki w obszarze, w którym obserwowana prędkość ruchu orbitalnego gwiazd nie zależy od r? Przyjmij sferycznie symetryczny rozkład masy ciemnej materii.

F 1110. Rowerzysta jedzie z prękością v po drodze pokrytej cienką warstwą błota. Nad kołami wyścigowego roweru nie ma błotników. Na jaką maksymalną wysokość mogą wznosić się cząstki błota oderwane od kół roweru. Koła mają promień R, przyspieszenie ziemskie równe jest g. Opór powietrza pomijamy.

Rozwiązania na str. 24