Konstrukcje indukcyjne

Bartłomiej BZDĘGA

Uniwersytet im. A. Mickiewicza w Poznaniu

Jednym z najprostszych przykładów omawianych tu konstrukcji jest następujące rozumowanie, znane już Euklidesowi. Niech $p_1, p_2, \ldots, p_n$ będą różnymi liczbami pierwszymi. Dowolny dzielnik pierwszy p_{n+1} liczby $p_1 p_2 \ldots p_n + 1$ jest różny od $p_1, p_2, \ldots, p_n$. Możemy w ten sposób utworzyć nieskończony ciąg różnych liczb pierwszych.

Ogólna idea jest następująca. Mając już obiekty $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \ldots, \mathcal{A}_n$, używamy ich w jakiś sposób do skonstruowania kolejnego obiektu $\mathcal{A}_{n+1}$. Tymi obiektami mogą być liczby, ale również zbiory, funkcje, konfiguracje geometryczne bądź kombinatoryczne i wiele innych.

Jako dodatkowe przykłady podam tu dwa zadania, które ukazały się już w kąciku numer 7 (Δ^7_{19}), poświęconemu indukcji.

Przykład 1. Dla każdego całkowitego dodatniego n istnieje n-cyfrowa wielokrotność liczby 2^n, w której zapisie nie ma innych cyfr niż 1 i 2.

Rozwiązanie. Powiedzmy, że dla pewnego n znamy już szukaną liczbę a_n. Wykażemy, że możemy przyjąć $a_{n+1} = a_n + 10^n$ lub $a_{n+1} = a_n + 2 \cdot 10^n$. Są to liczby $(n+1)$-cyfrowe powstałe przez dopisanie na początku zapisu dziesiętnego liczby a_n cyfry 1 lub 2. Zapiszmy $a_n = k \cdot 2^n$ dla pewnego naturalnego k. Wówczas

$$a_n + 10^n = (k + 5^n) \cdot 2^n, \qquad a_n + 2 \cdot 10^n = (k + 2 \cdot 5^n) \cdot 2^n.$$

Jeśli k jest liczbą nieparzystą, to pierwsza z powyższych liczb dzieli się przez 2^{n+1}, a jeśli parzystą – druga. Konstrukcję rozpoczynamy od $a_1 = 2$.

Przykład 2. Dla każdej liczby naturalnej $n \geqslant 7$ można tak umieścić na okręgu liczby od 1 do n, by wartość bezwzględna różnicy sąsiednich liczb zawsze była kwadratem liczby naturalnej.

Rozwiązanie. Wykażemy mocniejszą tezę – można to zrobić tak, by dodatkowo liczby n i $n-1$ sąsiadowały. Jeśli znamy takie rozmieszczenie dla n liczb, to możemy łatwo otrzymać analogiczne dla $n+3$ liczb – wystarczy pomiędzy n i $n-1$ wpisać kolejno: $n+1$, $n+2$, $n+3$. Aby dokończyć dowód, trzeba jeszcze podać konstrukcje dla $n = 7, 8, 9$. Są one następujące:

$$7, 6, 2, 1, 5, 4, 3; \qquad 8, 7, 6, 5, 1, 2, 3, 4; \qquad 9, 8, 4, 3, 7, 6, 2, 1, 5.$$

Bardzo istotne jest, by oprócz kroku indukcyjnego konstrukcji sformułować i uzasadnić odpowiednie warunki początkowe, gwarantujące, że dane obiekty istnieją dla każdego n, które nas interesuje.

Zadania

1. Udowodnić, że dla $n > 1$ w wyrażeniu $0 + 1 + 2 + \ldots + n$ można zamienić niektóre ze znaków $+$ na $-$ w taki sposób, by jego wartość była równa 0 lub 1.
2. Dowieść, że dla każdego naturalnego $n \geqslant 2$ istnieje wielościan wypukły, którego ścianami są: jeden kwadrat i $2n$ trójkątów rozwartokątnych.
3. Dane są wektory $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3, \ldots$, każdy o długości 1. Udowodnić, że istnieją liczby $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \ldots$ ze zbioru $\{-1, 1\}$ o tej własności, że dla każdego całkowitego dodatniego n zachodzi nierówność $|\varepsilon_1 \vec{v}_1 + \varepsilon_2 \vec{v}_2 + \ldots + \varepsilon_n \vec{v}_n| \leqslant \sqrt{n}$.
4. Wykazać, że istnieje ciąg liczb całkowitych dodatnich, w którym każda liczba całkowita dodatnia występuje dokładnie raz, a przy tym każdy wyraz, począwszy od drugiego, jest dzielnikiem lub wielokrotnością poprzedniego wyrazu (II WLM).
5. Udowodnić, że dla każdej liczby naturalnej $n \geqslant 3$ istnieją dwa rozłączne n-elementowe zbiory, A i B, zawierające wyłącznie liczby całkowite dodatnie spełniające następujący warunek: sumy wszystkich elementów w zbiorach A i B są równe oraz iloczyny wszystkich elementów w zbiorach A i B są równe (LXI OM).
6. Dowieść, że dla każdej liczby naturalnej $n \geqslant 2$ istnieje n-elementowy zbiór A liczb całkowitych dodatnich o następującej własności: dla każdych dwóch różnych elementów $a, b \in A$ zachodzi równość $\mathtt{NWD}(a, b) = |a - b|$ (XIV WLM).
7. Udowodnić, że dla $n \geqslant 12$ istnieje permutacja $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ ciągu $(1, 2, \ldots, n)$ o następującej własności: $a_k + k$ jest kwadratem liczby naturalnej dla każdego $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$.

Wskazówki do zadań

1. Jeśli $s \in \{0, 1\}$, to $s - (n+1) + (n+2) \in \{0, 1\}$ albo $s + (n+1) - (n+2) \in \{0, 1\}$.

2. W kroku indukcyjnym do jednej ze ścian trójkątnych danego wielościanu doklejamy czworościan. Wypukłość wielościanu i rozwartokątność ścian trójkątnych można zagwarantować, dobierając odpowiednio wysokość doklejonego czworościanu.

3. Niech $\vec{u}_n = \varepsilon_1 \vec{v}_1 + \varepsilon_2 \vec{v}_2 + \ldots + \varepsilon_n \vec{v}_n$. Liczbę ε_{n+1} wybieramy w taki sposób, by kąt pomiędzy wektorami $\vec{u}_n$ i $\varepsilon_{n+1} \vec{v}_{n+1}$ był nie mniejszy niż 90°.

4. Załóżmy, że mamy ustalone wyrazy $a_1, a_2, \ldots, a_{2n}$. Niech a_{2n+2} będzie najmniejszą liczbą całkowitą dodatnią, która jeszcze nie pojawiła się w ciągu, następnie a_{2n+1} – dowolną wspólną wielokrotnością a_{2n} i a_{2n+2}, różną od $a_1, a_2, \ldots, a_{2n}$ oraz a_{2n+2}.

5. Niech A i B będą zbiorami n-elementowymi, a A' i B' zbiorami m-elementowymi spełniającymi wymagane warunki. Wówczas dla odpowiednio dużego k zbiory $(m+n)$-elementowe $A \cup kA'$ i $B \cup kB'$ również je spełniają (kX oznacza zbiór wszystkich elementów zbioru X pomnożonych przez k). Wystarczy więc znaleźć odpowiednie pary zbiorów dla $n = 3, 4, 5$.

6. Mając zbiór $\{a_1, \ldots, a_n\}$ spełniający zadane warunki, tworzymy zbiór $\{b_1, \ldots, b_n, b_{n+1}\}$ następująco: $b_j = a_j + a_1 a_2 \ldots a_n$ dla $j = 1, 2, \ldots, n$ oraz $b_{n+1} = a_1 a_2 \ldots a_n$.

7. Załóżmy, że liczby $n_1 < n_2$ mają tę własność, że $n_1 + n_2 + 1 = a^2$ dla pewnej liczby naturalnej a. Wówczas jeśli szukana permutacja istnieje dla liczby n_1, to również istnieje dla liczby n_2. Dla dowodu rozważmy odpowiednią permutację $(a_1, \ldots, a_{n_1})$ dla liczby n_1 oraz $a_k = a^2 - k$ dla $n_1 < k \leqslant n_2$. Załóżmy teraz indukcyjnie, że opisana w zadaniu własność zachodzi dla każdej liczby m spełniającej $12 \leqslant m < n$. Wybierzmy największe takie $m < n$, że $m + n + 1$ jest kwadratem. Wtedy $m \geqslant n - 2\sqrt{2n}$ (dlaczego?), co jest większe od 11 dla $n \geqslant 26$. Pozostaje uzasadnić twierdzenie dla liczb od 12 do 25.