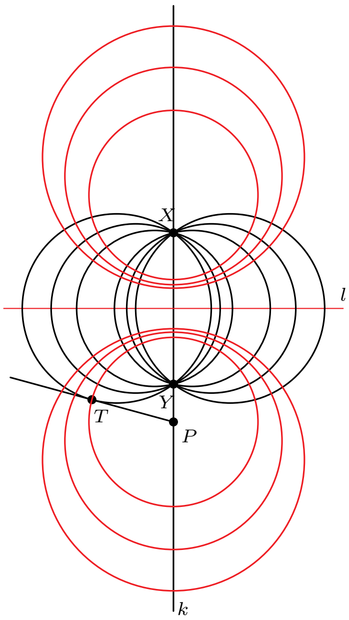
Pęk wiadomości o pękach okręgów

*Łukasz RAJKOWSKI**

* Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Uniwersytet Warszawski

Opublikowany w niniejszym wydaniu *Delty* artykuł Stanisława Majchrzaka garściami czerpie z klasycznych pojęć geometrii elementarnej. Pojawia się w nim również hasło *pęk okręgów*, które może być obce nawet co bardziej zaawansowanym naśladowcom Euklidesa. Aby oszczędzić Czytelnikowi przeszukiwania Internetu (który zwłaszcza w polskojęzycznej odsłonie jest w tym zakresie dość ubogi w informacje), prezentujemy tutaj przegląd podstawowych informacji na temat tej wdzięcznej geometrycznej konfiguracji.

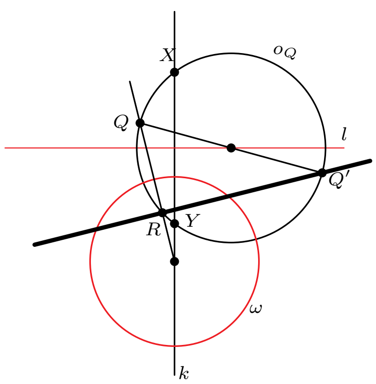
Tak jak zostało to już wspomniane w przytoczonym artykule, przykładem pęku okręgów jest rodzina wszystkich okręgów przechodzących przez ustalone dwa punkty X i Y. Wówczas prosta XY jest *osią potęgową* (patrz *Deltoid* w Δ^3_{12}) dowolnej pary okręgów z tej rodziny, którą z tego względu nazywa się czasem *okręgami współosiowymi*. Oznaczmy ową rodzinę jako $\mathcal{O}$, a jej wspólną oś potęgową jako k.



Rys. 1. Okręgi z rodziny $\mathcal{O}$ narysowane są na czarno, a okręgi z rodziny Ω – na czerwono. Dowolny czarny okrąg jest prostopadły do dowolnego czerwonego

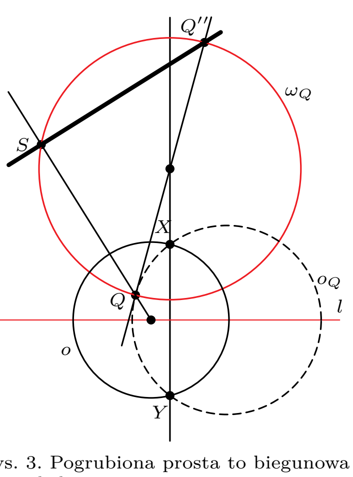
Wybierzmy na k dowolny punkt P. Poprowadźmy z P styczną do dowolnego okręgu $o \in \mathcal{O}$ i niech T będzie punktem styczności (rys. 1). Wówczas $PT^2 = PX \cdot PY$ (co wynika z definicji osi potęgowej). Oznacza to, że okrąg ω o środku P i promieniu $\sqrt{PX \cdot PY}$ jest *prostopadły* do o, czyli styczne do tych okręgów w punkcie przecięcia są prostopadłe. Z dowolności wyboru o okrąg ω jest prostopadły do wszystkich okręgów z rodziny $\mathcal{O}$. Rodzinę tak skonstruowanych okręgów ω dla różnych wyborów punktu P na prostej k oznaczmy przez Ω.

Można pokazać, że osią potęgową dowolnych dwóch okręgów z rodziny Ω jest symetralna l odcinka XY. Dlatego Ω również nazywana jest rodziną okręgów współosiowych lub też pękiem – tym razem jednak są to okręgi parami rozłączne i dlatego to drugie określenie może być odrobinę mylące. Ogólnie *okręgami współosiowymi* nazwiemy każdą rodzinę okręgów, dla której istnieje prosta będąca osią potęgową dowolnej pary okręgów z tej rodziny. Jeśli nie można jej powiększyć o żaden dodatkowy okrąg, mówimy o *pęku okręgów*.



Rys. 2. Pogrubiona prosta to biegunowa Q względem ω

Wybierzmy dowolny punkt Q i okrąg $\omega \in \Omega$. Poprowadźmy *biegunową* Q *względem* ω – definicja biegunowej pojawiła się już w artykule Stanisława Majchrzaka. Udowodnimy, że dla różnych wyborów okręgu ω utworzone w ten sposób proste przecinają się w jednym punkcie. W tym celu przypomnimy alternatywną definicję biegunowej (patrz KPO w Δ^1_{23}) – jest to prosta prostopadła do odcinka łączącego dany punkt ze środkiem okręgu, przechodząca przez obraz *inwersyjny* tego punktu względem okręgu. Czytelnikom, którym obce jest pojęcie inwersji, a którzy mimo to pragną doczytać ten tekst do końca (co jest godne pochwały!), polecam *Deltoid* z numeru Δ^5_{13} oraz artykuł Michała Miśkiewicza z Δ^7_{14}. Dla nas istotne będzie jedynie to, że inwersja względem okręgu κ o środku w punkcie K zachowuje półproste wychodzące z punktu K oraz okręgi prostopadłe do κ.



Rys. 3. Pogrubiona prosta to biegunowa Q względem o

Narysujmy teraz okrąg o_Q opisany na trójkącie XYQ. Oczywiście $o_Q \in \mathcal{O}$, zatem o jest prostopadły do wszystkich okręgów z Ω, w tym ω. Dlatego obraz inwersyjny Q względem ω to punkt R przecięcia o z półprostą ze środka ω do Q (rys. 2). Zaś odpowiednia biegunowa to prosta prostopadła do wspomnianej półprostej, przechodząca przez R. Oznacza to jednak, że biegunowa ta przechodzi przez punkt Q', antypodalny do Q w okręgu o_Q (gdyż kąt QRQ' jest prosty). Udowodniliśmy w ten sposób, że biegunowe punktu Q względem okręgów z rodziny Ω przecinają się w punkcie Q' (zależnym tylko od punktów X, Y i Q).

Udowodnimy teraz, że biegunowe Q względem okręgów z $\mathcal{O}$ również przecinają się w jednym punkcie. Pomysł jest dokładnie taki sam – wystarczy udowodnić, że istnieje okrąg ω_Q należący do Ω, który przechodzi przez Q. Wówczas wszystkie rozważane biegunowe będą musiały przechodzić przez punkt Q'' antypodalny do Q w ω_Q. Skonstruowanie okręgu ω_Q nie jest trudne – potrzeba (i wystarcza), by był on prostopadły również do okręgu o_Q. Dlatego środek szukanego okręgu ω_Q leży na prostej stycznej do o_Q w punkcie Q. Środek ten leży też na prostej k, co pozwala na jego wyznaczenie i w konsekwencji lokalizację punktu Q'', w którym przecinają się wszystkie biegunowe punktu Q względem okręgów z $\mathcal{O}$.

Na zakończenie wybierzmy w pęku $\mathcal{O}$ dowolne dwa prostopadłe okręgi i dołączmy do nich dowolny okrąg z Ω. Dostaniemy trzy okręgi, z których każde dwa są prostopadłe – ciekawa własność jak na prostopadłość. A czy możliwa jest taka konfiguracja czterech okręgów?

Liga zadaniowa Wydziału Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Wydziału Fizyki Uniwersytetu Warszawskiego i Redakcji *Delty*

Klub 44 F

Czołówka ligi zadaniowej **Klub 44 F** po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań 778 ($WT = 1{,}95$), 779 ($WT = 3{,}15$) z numeru 5/2024

Paweł Perkowski	Ożarów Maz.	5–43,19
Jacek Konieczny	Poznań	40,87
Konrad Kapcia	Poznań	2–39,97
Tomasz Wietecha	Tarnów	17–30,38
Andrzej Nowogrodzki	Chocianów	3–27,19
Jan Zambrzycki	Białystok	4–25,85

Czołówka ligi zadaniowej **Klub 44 M** po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań 881 ($WT = 1{,}5$) i 882 ($WT = 2{,}27$) z numeru 5/2024

Adam Woryna	Ruda Śl.	44,68
Michał Adamaszek	Kopenhaga	42,89
Szymon Kitowski	Warszawa	41,11
Witold Bednarek	Łódź	38,79
Krzysztof Zygan	Lubin	37,56
Mikołaj Pater		36,34
Tomasz Wietecha	Tarnów	35,18
Andrzej Daniluk	Warszawa	34,46
Jędrzej Biedrzycki		32,29
Andrzej Kurach	Ryjewo	31,79

Pan Adam Woryna, Weteran naszej ligi już od kilkunastu lat, teraz znów bardzo aktywny, autor kilku bardzo ciekawych zadań, właśnie wykonał czwartą rundę.

Klub 44 M

Termin nadsyłania rozwiązań: 28 II 2025

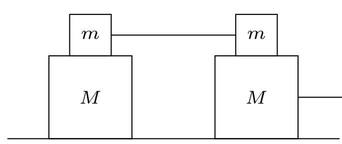
Zadania z fizyki nr 788, 789

Redaguje Elżbieta ZAWISTOWSKA

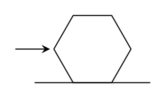
788. Na gładkim stole leży układ klocków przedstawiony na rysunku 1. Współczynnik tarcia między klockami o masach$M$ i m wynosi μ. Klocki o masach m połączone są nieważką, nierozciągliwą nicią. Prawy dolny klocek ciągnięty jest równolegle do stołu siłą F. Znaleźć przyspieszenia wszystkich klocków.

789. Sześciokątny ołówek popchnięto wzdłuż płaszczyzny poziomej jak na rysunku 2. Jaki musi być współczynnik tarcia μ między ołówkiem a płaszczyzną, aby ołówek ślizgał się po płaszczyźnie i nie obracał?

Rys. 1



Rys. 2



Zadania z matematyki nr 891, 892

Redaguje Marcin E. KUCZMA

891. Znaleźć wszystkie liczby rzeczywiste φ, spełniające dla każdej liczby całkowitej $n \geqslant 0$ warunek: $\cos\big(2^n\varphi\big) \leqslant 0$.

892. Dana jest liczba naturalna $n \geqslant 2$. W turnieju badmintona bierze udział n zawodników; każdy z każdym rozgrywa jeden mecz, nie ma remisów. Dla każdej liczby $k \in \{0, \ldots, n-1\}$ wyznaczyć maksymalną wartość, jaką może osiągnąć liczba zawodników, którzy zakończyli turniej, mając dokładnie k wygranych meczów.

Zadanie 892 zaproponował pan Michał Adamaszek z Kopenhagi.

Skrót regulaminu

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru n w terminie do końca miesiąca $n + 2$. Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze $n + 4$. Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przesyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**. Można je przesyłać również pocztą elektroniczną pod adresem `delta@mimuw.edu.pl` (preferujemy pliki pdf). Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez współczynnik trudności danego zadania: $WT = 4 - 3S/N$, przy czym S oznacza sumę ocen za rozwiązania tego zadania, a N – liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (**M** lub **F**) – i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu **44** punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (**M** lub **F**), zostaje on członkiem **Klubu 44**, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo – to tytuł **Weterana.** Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 2/2002 oraz znajduje się na stronie `deltami.edu.pl`.