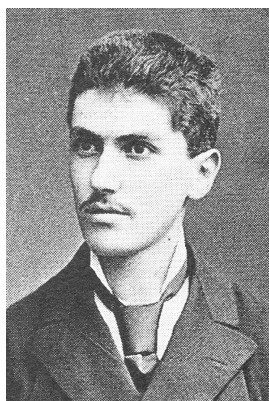
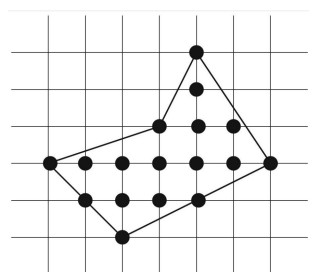


W trzecim etapie adaptacji noszący okulary porusza się całkowicie naturalnie, jeździ na rowerze, szkicuje pejzaże, a kiedy przechyla głowę, obserwowane obiekty pozostają nieruchome.

Trudno jest uwierzyć w możliwości adaptacyjne naszego organizmu. Widzimy świat, jakim jest, dzięki wielokrotnemu doświadczaniu, składaniu bodźców wzrokowych i dotykowych. Jest to proces dynamiczny, a nie statyczna funkcja wyćwiczona w dzieciństwie lub dana raz na zawsze. Wrażenia wzrokowe są stale poddawane weryfikacji przez inne zmysły. Dopóki są one spójne, dopóty widzimy prawidłowo i dobrze orientujemy się w przestrzeni. Kiedy sygnały są sprzeczne, ale działają według nowej reguły wystarczająco długo i systematycznie, początkowo następuje dezorganizacja systemu orientacji przestrzennej, a później mózg stopniowo przeprogramowuje się. Obrazowanie aktywności różnych rejonów mózgu w procesie adaptacji wykazuje, że jest to proces zachodzący etapami, angażujący nowe rejony mózgu.



Powyższe zdjęcie Georga Picka zostało wykonane ok. 1885 roku



Dla zaznaczonego wielokąta mamy  $p_w = 10$  oraz  $p_b = 7$ , zgodnie z twierdzeniem Picka jego pole jest równe  $10 + 3,5 - 1 = 12,5$

Przy okazji szperania w historii badań percepcji dokonałam być może odkrycia z innej dziedziny. Historia odwracających okularów wydała mi się nieprawdopodobna i zamarzyłam, żeby osobiście doświadczyć odwrócenia perspektywy i adaptacji do zmian. Szybko znalazłam w Internecie ofertę okularów odwracających. *Przeżyj moment wspaniałych emocji! Trenuj swoje umiejętności orientacji w przestrzeni! Zmniejsz swoją chorobę lokomocyjną! Porzuć lenistwo i prokrastynację! Znajdź swoje własne zastosowanie – to najlepszy upominek, jaki możesz komuś dać. . .* głoszą hasła zachęcające do kupna całego tego szczęścia w przystępnej cenie 11 800 rubli. Adres wytwórcy: Moskwa, ul. Talińska 22.

Muszę do nich napisać. Może niewłaściwe osoby dostały ten podarunek – niech im powiedzą, że czas zdjąć okulary. Niech świat wróci do normy. Tego sobie i Państwu życzę w Nowym Roku.

Marta FIKUS-KRYŃSKA

## „Wodny” dowód twierdzenia Picka

Jarosław GÓRNICKI

Georg Alexander Pick (1859–1942) był austriackim matematykiem żydowskiego pochodzenia. W latach 1884–1927 pracował na Uniwersytecie Karola w Pradze. Od 1888 roku był profesorem, a od 1889 członkiem Niemieckiej Akademii Nauk Leopoldina. Utrzymywał kontakty z Albertem Einsteinem i Felixem Kleinem. Zajmował się analizą zespoloną, równaniami różniczkowymi, całkowymi oraz geometrią różniczkową. W lipcu 1942 roku został wywieziony do obozu koncentracyjnego Theresienstadt, gdzie zmarł dwa tygodnie później.

W matematyce Georg Pick znany jest między innymi jako autor pewnego prostego a pięknego twierdzenia dotyczącego *kraty*, czyli zbioru  $\mathbb{Z}^2 = \{(m, n) : m, n \in \mathbb{Z}\}$  na płaszczyźnie euklidesowej  $\mathbb{R}^2$ . Elementy tego zbioru będziemy nazywać *punktami kratowymi*.

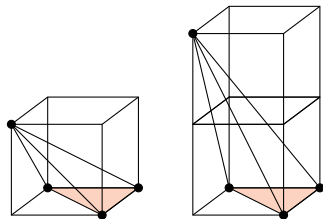
**Twierdzenie** (G. Pick, 1899). *Pole wielokąta  $W$ , którego wierzchołki są punktami kratowymi, a boki nie przecinają się, jest równe*

$$|W| = p_w + \frac{1}{2}p_b - 1,$$

gdzie  $p_w$  jest liczbą punktów kratowych we wnętrzu wielokąta, zaś  $p_b$  liczbą punktów kratowych na jego brzegu.

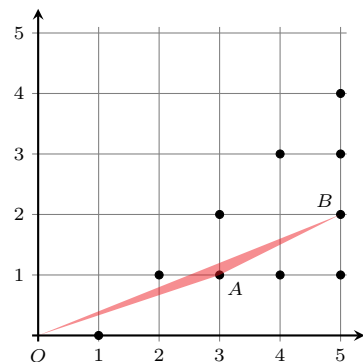
Oto pomysłowy dowód przez. . . lanie wody (dosłownie), przedstawiony przez szwajcarskiego matematyka Christiana Blattera w 1997 roku. W każdym punkcie poziomej kraty  $\mathbb{Z}^2$  umieszczamy bryłkę lodu o objętości 1. Bryłki mają kształt cienkich cylindrów (środki podstaw są punktami kratowymi). Następnie czekamy, aż lód się stopi. Woda równomiernie rozleje się na niewsiąkliwej płaszczyźnie, tworząc nieskończony ocean o głębokości 1 (pomijamy parowanie oraz różnice w gęstości wody i lodu). Wtedy objętość wody nad obszarem wielokąta  $W$  jest, co do wartości liczbowej, równa powierzchni wielokąta  $W$ . Ale skąd weźmie się woda nad wielokątem? W trakcie topnienia lodu część wody do niego dopływa, a część wypływa. Zauważmy, że środek dowolnie wybranego boku wielokąta  $W$  jest środkiem symetrii kraty  $\mathbb{Z}^2$ , więc w każdej chwili przepływ wody jest centralnie symetryczny względem tego środka. Zatem całkowity przepływ wody przez tę krawędź wielokąta (więc i każdą inną) jest zerowy. Oznacza to, że ilość wody nad obszarem wielokąta nie zmienia się w czasie! Możemy teraz przyjąć, że bryłki były na tyle cienkie, iż woda nad obszarem

Christian Blatter, *Another Proof of Pick's Area Theorem*, Mathematics Magazine vol. 70, 1997. Sformułowanie autora jest odrobinę inne (mowa w nim o rozchodzeniu się ciepła), pomysł z „bryłkami lodu” pochodzi od Güntera M. Zieglera (o czym wspomina przytoczony artykuł).



Rys. 1

Ciągi  $f_n$  pojawiły się już w 1802 roku w pracach francuskiego geometry Charlesa Harosa, ale nie wzbudziły wówczas zainteresowania.



Rys. 2. Zaznaczone punkty odpowiadają wyrazom ciągu  $f_6$ , przy czym  $A = (3, 1)$  i  $B = (5, 2)$  odpowiadają dwóm kolejnym wyrazom. Wewnątrz trójkąta  $AOB$  nie ma żadnego punktu kratowego, zatem zgodnie ze wzorem Picka jego pole jest równe  $\frac{1}{2}$ .

Kraty  $\mathbb{Z}^2$  pojawiły się np. na stronie 6 oraz w  $\Delta_{19}^2$ , a ciągi Fareya w  $\Delta_{08}^2$ ,  $\Delta_{10}^2$ .

wielokąta pochodzi jedynie z bryłek lodu umieszczonych w punktach kratowych we wnętrzu lub na brzegu wielokąta  $W$ . Każdy punkt kraty leżący wewnątrz wielokąta „daje” jednostkę wody. Punkt kratowy znajdujący się wewnątrz krawędzi (niebędący jej końcem) „daje” pół jednostki wody, a wierzchołek „daje”  $\frac{\alpha}{2\pi}$  jednostki wody, gdzie  $\alpha$  jest miarą kąta wewnętrznego wielokąta przy tym wierzchołku. Ponieważ suma miar kątów wewnętrznych  $n$ -kąta ( $n \geq 3$ ) jest równa  $(n-2)\pi$ , więc ich całkowity udział zapewnia  $\frac{(n-2)\pi}{2\pi} = \frac{n}{2} - 1$  jednostek wody. Stąd teza twierdzenia.  $\square$

**Wniosek 1.** *Trójkąt o wierzchołkach w punktach kratowych, który we wnętrzu ani na brzegu nie ma innych punktów kratowych, ma pole równe  $\frac{1}{2}$ .*

Twierdzenie Picka nie ma rozszerzenia na kratę  $\mathbb{Z}^3$ . Pokazuje to przykład J.E. Reeve'a (1957). Czworosciany z rysunku 1 mają 4 wierzchołki w punktach kratowych, nie zawierają innych punktów kratowych, ale mają różne objętości.

Wykorzystamy teraz powyższy wniosek, aby wykazać podstawową własność tzw. *ciągów Fareya*.

Przypomnijmy, *ciągami Fareya* rzędu  $n \in \mathbb{N}$  (oznaczenie  $f_n$ ) nazywamy uporządkowany rosnąco ciąg ułamków nieskracalnych z przedziału  $[0, 1]$  o mianownikach nie większych od  $n$ , np.:

$$f_1 : \left\{ \frac{0}{1}, \frac{1}{1} \right\}, \quad f_2 : \left\{ \frac{0}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{1} \right\}, \quad f_3 : \left\{ \frac{0}{1}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{1} \right\},$$

$$f_4 : \left\{ \frac{0}{1}, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{1}{1} \right\}, \quad f_5 : \left\{ \frac{0}{1}, \frac{1}{5}, \frac{1}{4}, \frac{2}{5}, \frac{3}{5}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{1}{1} \right\},$$

$$f_6 : \left\{ \frac{0}{1}, \frac{1}{6}, \frac{1}{5}, \frac{1}{4}, \frac{2}{5}, \frac{1}{3}, \frac{2}{5}, \frac{3}{5}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{1}{1} \right\} \text{ itd.}$$

Oczywiście  $f_n \subset f_{n+1}$ ,  $n = 1, 2, \dots$

John Farey (senior) (1766–1826), angielski geolog zainteresowany „matematyką dźwięków”, w 1816 roku zadał pytanie: czy dla trzech kolejnych wyrazów ciągu  $f_n$  ( $n \geq 2$ ),  $\frac{a}{b} < \frac{p}{q} < \frac{c}{d}$  zawsze prawdziwa jest równość  $\frac{p}{q} = \frac{a+c}{b+d}$ ? W tym samym roku Augustin-Louis Cauchy (1789–1857) potwierdził – jak pisał – „niezwykłą właściwość zwykłych ułamków zaobserwowaną przez pana J. Fareya”.

**Lemat** (Cauchy–Farey, 1816). *Jeżeli  $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$  są kolejnymi wyrazami ciągu Fareya  $f_n$  ( $n \geq 1$ ), to  $bc - ad = 1$ .*

*Dowód.* Punkt  $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$  nazywamy *widzialnym* z punktu  $(0, 0)$ , gdy na odcinku łączącym te punkty nie ma innych punktów kratowych.

Jeżeli każdy ułamek  $\frac{a}{b} \in f_n$  utożsamimy z punktem  $(b, a) \in \mathbb{Z}^2$ , to punkt  $(b, a)$  jest widzialny (bo ułamek  $\frac{a}{b}$  jest nieskracalny) i należy do trójkąta  $T_n$  o wierzchołkach  $(0, 0)$ ,  $(n, 0)$ ,  $(n, n)$ . Co więcej, punkt kratowy  $(b, a) \in T_n$  jest widzialny wtedy i tylko wtedy, gdy  $\frac{a}{b} \in f_n$ .

Wtedy promień wodzący zaczepiony w punkcie  $(0, 0)$  i leżący na osi  $OX$ , obracając się przeciwnie do ruchu wskazówek zegara, przechodzi przez kolejne punkty widzialne w trójkącie  $T_n$ , reprezentowane przez ułamki  $\frac{a}{b} \in f_n$  w ich porządku rosnącym. Zatem trójkąt o wierzchołkach  $(0, 0)$ ,  $(b, a)$ ,  $(d, c)$  nie zawiera innych punktów kratowych, a więc jego pole jest równe  $\frac{1}{2}$  (wniosek 1). Jednocześnie z geometrii analitycznej wiemy, że pole trójkąta, którego wierzchołki mają wyżej dane współrzędne, jest równe  $\frac{1}{2}(bc - ad)$ . Stąd  $bc - ad = 1$ .  $\square$

**Wniosek 2.** *Jeżeli  $\frac{a}{b} < \frac{p}{q} < \frac{c}{d}$  są trzema kolejnymi wyrazami ciągu  $f_n$ ,  $n \geq 2$ , to  $\frac{p}{q} = \frac{a+c}{b+d}$ .*

*Dowód.* Z lematu  $bp - aq = 1 = qc - pd$ , skąd wynika teza.  $\square$

Ciągi Fareya znalazły zastosowanie w aproksymacji liczb niewymiernych liczbami wymiernymi, znamy ich związek z algorytmem (drzewem) Sterna–Brocota, z hipotezą Riemanna czy z „problemem  $3n + 1$ ”. To jest jednak temat na inne spotkanie.