Dla jakich n istnieje…?

Bartłomiej BZDĘGA

Uniwersytet im. A. Mickiewicza w Poznaniu

Zajmiemy się tu zadaniami, w których należy wyznaczyć wszystkie liczby naturalne n, dla których istnieje pewien zadany obiekt. Trzeba pamiętać, że rozwiązanie takiego zadania składa się z dwóch części:

- w przypadku tych n, dla których dany obiekt istnieje, wystarczy podać jego konstrukcję albo (co się zdarza w trudniejszych zadaniach) udowodnić jego istnienie metodami pośrednimi, takimi jak na przykład zasada szufladkowa;
- dla tych n, dla których nie istnieje dany obiekt, trzeba przeprowadzić dowód jego nieistnienia, najczęściej metodą nie wprost – przez założenie istnienia i doprowadzenie do sprzeczności.

Zwykle jedna z tych dwu części jest łatwiejsza. Pozwala to postawić odpowiednią hipotezę, co często ułatwia rozwiązanie trudniejszej części, ponieważ wiemy już, co chcemy wykazać.

Jako przykład rozwiążemy następujące zadanie z VII Wielkopolskiej Ligi Matematycznej.

Przykład. Nazwijmy *grubym* prostokąt o bokach x i y spełniających warunek $\frac{1}{2}x < y < 2x$. Wyznaczyć wszystkie liczby naturalne n, dla których z kafelków o wymiarach $1 \times 1, 1 \times 2, \ldots, 1 \times n$ można ułożyć gruby prostokąt (każdy z kafelków musi być użyty dokładnie jeden raz).

Rozwiązanie. Pole takiego prostokąta jest równe $\frac{1}{2}n(n+1)$, dodatkowo jeden z boków ma długość co najmniej n. W takim razie drugi bok ma długość co najwyżej $\lfloor \frac{1}{2}(n+1) \rfloor$, co jest równe $\frac{1}{2}n$ dla n parzystych. Ale wówczas otrzymany prostokąt nie jest gruby. Udowodniliśmy zatem, że dla parzystych n taki prostokąt nie istnieje.

W przypadku nieparzystych n możemy skonstruować gruby prostokąt, tak jak na rysunku obok.

$(n-1)/2$	$(n+1)/2$
$\ldots$	$\ldots$
2	$n-2$
1	$n-1$
n	

Widoczny tu motyw parzystości często pojawia się w tego typu zadaniach.

Zadania

1. Wyznaczyć wszystkie liczby naturalne $n \geqslant 4$, dla których istnieje n-kąt, którego każdy kąt wewętrzny ma $90°$ lub $270°$.
2. Dla jakich liczb całkowitych dodatnich n zbiór $\{1, 2, 3, \ldots, 2n\}$ można rozbić na dwa rozłączne n-elementowe podzbiory o jednakowych sumach?
3. Wyznaczyć wszystkie liczby naturalne n, dla których istnieje n-ścian wypukły, którego wszystkie ściany są przystającymi trójkątami.
4. Niech n będzie liczbą nieparzystą. Z $\frac{n^3-1}{2}$ niebieskich prostopadłościanów o wymiarach $1 \times 1 \times 2$ i jednego zielonego o wymiarach $1 \times 1 \times 1$ chcemy zbudować sześcian o krawędzi n, ale środek powstałego sześcianu ma leżeć w środku zielonego klocka. Wyznaczyć wszystkie n, dla których jest to możliwe.
5. Znaleźć wszystkie całkowite dodatnie n, dla których istnieje ciąg $(x_0, x_1, \ldots, x_n)$ o następujących własnościach: $x_0 = 0$, $x_1 + x_2 + \ldots + x_n = 0$ oraz $|x_k| = |x_{k-1} + 1|$ dla każdego $k = 1, 2, \ldots, n$. (LII OM, zmodyfikowane)
6. Wyznaczyć wszystkie dodatnie liczby całkowite n o następującej własności: z n prostokątów o wymiarach $1 \times n, 2 \times n, \ldots, n \times n$ można ułożyć kwadrat. (LXXV OM)

Problem otwarty

7. Na płaszczyźnie znaduje się n punktów czerwonych, n zielonych i n niebieskich. Każda prosta przechodzi albo przez co najwyżej jeden z tych punktów, albo przez dwa punkty jednakowego koloru, albo przez trzy punkty różnych kolorów. Wyznaczyć wszystkie możliwe wartości n. (Problem autorski, częściowe rozwiązanie w Matematycznym Kalendarzu Adwentowym 2021).

Wskazówki do zadań

1. Każde dwa sąsiednie boki są prostopadłe, więc $n \geqslant 4$ musi być parzyste.
2. Liczba $1 + 2 + \ldots + 2n = n(2n+1)$ musi być parzysta, więc liczba n również.
3. Liczba krawędzi takiego wielościanu jest równa $\frac{3}{2}n$, więc n musi być parzyste. Dla $n = 4$ mamy czworościan foremny, a dla parzystych $n > 4$ można skleić podstawami dwa przystające prawidłowe ostrosłupy $(n/2)$-kątne.
4. Zauważmy, że analogiczna konstrukcja na płaszczyźnie jest wykonalna dla każdego nieparzystego n. Jeśli $n = 4k+1$, to jako środkową warstwę sześcianu bierzemy konstrukcję z płaszczyzny, a dodatkowo z góry i z dołu dokładamy prostopadłościany $n \times n \times 2k$. W przypadku $n = 4k+3$ kolorujemy sześciany jednostkowe sześcianu $n \times n \times n$ w czarno-białą szachownicę. Niech środkowy sześcianik będzie czarny – wśród pozostałych jest wtedy więcej białych niż czarnych, z czego można wywnioskować, że konstrukcja jest niewykonalna.
5. Niech $s_k = x_1 + x_2 + \ldots + x_k$. Po podniesieniu danej w zadaniu równości obustronnie do kwadratu, zsumowaniu stronami dla $k = 1, 2, \ldots, n$ i prostych przekształceniach otrzymamy $2s_n + n + 1 = (x_n + 1)^2$, więc $s_n = 0 \iff |x_n + 1| = \sqrt{n+1}$. Wnioskujemy stąd, że $n = m^2 - 1$ dla pewnego naturalnego m. Osiągalności dowodzimy indukcyjnie, rozważając wszystkie możliwe wartości x_n.
6. Liczba $\frac{1}{2}n^2(n+1)$ musi być kwadratem, więc $n = 2k^2 - 1$ dla pewnej liczby całkowitej k, a stąd bok kwadratu ma długość kn. W celu wykonania konstrukcji można ułożyć k^2 kwadratów $n \times n$.
7. Znana jest mi konstrukcja dla $n = 1, 2, 3, 4$ i nic więcej.