Jedno z nich, ASDURF, jest na przykład produkowane w nadmiarze w komórkach rdzeniaka zarodkowego, trudnego do zdiagnozowania nowotworu dziecięcego. Jego nadprodukcja wydłuża czas życia komórek nowotworowych. Inne badania wskazują na rolę mikrobiałek w rozwoju otyłości, raka trzustki i w chorobach metabolicznych.

Co zatem stanowi esencję „człowieka" na poziomie cząsteczek? Jako jedyny gatunek, który jest w stanie analizować własny genom, musimy wciąż zachować pokorę dla złożoności rozwiązań natury i cierpliwie szukać dalszych odpowiedzi. Bo przecież wiadomo było, że to nie może być proste...

Marta FIKUS-KRYŃSKA

Odwzorowania addytywne i geometria

Franciszek HANSDORFER

Artykuł jest skrótem pracy z 45. edycji Konkursu Uczniowskich Prac z Matematyki im. Pawła Domańskiego. Z pełną jej wersją można zapoznać się na stronie `deltami.edu.pl`. Autor chciałby bardzo podziękować dr. hab. Mariuszowi Skałbie za opiekę merytoryczną.

Rozważmy zbiór
$$K = \{a + b\sqrt{2} : a, b \in \mathbb{Q}\}.$$
Do tego zbioru należą zatem liczby $1 + 2\sqrt{2}$ czy $\frac{2}{3} + \frac{1}{8}\sqrt{2}$. Oczywiście należą do niego wszystkie liczby wymierne (wystarczy wziąć $b = 0$), w tym liczby 0 i 1. Ponadto jeśli wezmę dowolne dwie liczby z K, to ich suma i różnica również należą do K. Tak samo jest z iloczynem, o czym przekonuje nas poniższa równość:
$$(a + b\sqrt{2}) \cdot (c + d\sqrt{2}) = (ac + 2bd) + (bc + ad)\sqrt{2}.$$
Operacja dzielenia też nie wyprowadza poza K, w czego uzasadnieniu pomaga szkolna sztuczka na pozbywanie się niewymierności z mianownika:
$$\frac{a + b\sqrt{2}}{c + d\sqrt{2}} = \frac{(a + b\sqrt{2})(c - d\sqrt{2})}{(c + d\sqrt{2})(c - d\sqrt{2})} = \frac{ac - 2bd}{c^2 - 2d^2} + \frac{bc - ad}{c^2 - 2d^2}\sqrt{2}.$$

Strukturę, której elementy możemy dodawać, odejmować, mnożyć i dzielić z wyróżnionymi elementami 0 (którego dodanie nic nie zmienia) i 1 (mnożenie przez które nic nie zmienia), nazywamy *ciałem*. Ciałem jest zatem zbiór liczb rzeczywistych, wymiernych, lecz również opisany tu zbiór K.

Zdefiniujmy teraz funkcję $\sigma : K \to K$ wzorem:
$$\sigma(a + b\sqrt{2}) = a - b\sqrt{2}.$$

Dla $x \in K$ liczbę $\sigma(x)$ nazywa się często *sprzężeniem* x.

Przekształcenie σ w ten sposób zdefiniowane ma ciekawe własności. Zacznijmy od tego, że dobrze się ono zachowuje ze względu na dodawanie i mnożenie. Niech $x = a + b\sqrt{2}$, $y = c + d\sqrt{2}$, gdzie $a, b, c, d \in \mathbb{Q}$. Wtedy:
$$\begin{aligned}\sigma(x + y) &= \sigma(a + c + (b + d)\sqrt{2}) = a + c - (b + d)\sqrt{2}\\ &= a - b\sqrt{2} + c - d\sqrt{2} = \sigma(x) + \sigma(y),\\ \sigma(xy) &= \sigma\Big((a + b\sqrt{2})(c + d\sqrt{2})\Big) = \sigma(ac + ad\sqrt{2} + bc\sqrt{2} + 2bd)\\ &= \sigma\Big((ac + 2bd) + (ad + bc)\sqrt{2}\Big) = (ac + 2bd) - (ad + bc)\sqrt{2}\\ &= (a - b\sqrt{2})(c - d\sqrt{2}) = \sigma(x)\sigma(y).\end{aligned}$$
Pokazaliśmy, że σ jest *addytywna* i *multiplikatywna*. Co istotne, zachowuje ona elementy neutralne dodawania i mnożenia, czyli 0 i 1 – rzeczywiście, $\sigma(0) = 0$ oraz $\sigma(1) = 1$.

Przedstawione tu własności pozwalają nazwać funkcję σ *automorfizmem* ciała K.

Chociaż σ jest bardzo *porządną* funkcją z algebraicznego punktu widzenia, to z analitycznego punktu widzenia już taka regularna nie jest. Wykażemy mianowicie, że σ nie jest ciągła w żadnym punkcie. Przypomnijmy najpierw definicję Heinego ciągłości funkcji:

f jest ciągła w punkcie x_0 wtedy i tylko wtedy, gdy:
$$\forall (x_n) : \lim_{n\to\infty} x_n = x_0 \implies \lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x_0).$$
Niech więc $x_0 = a + b\sqrt{2}$, gdzie $a, b \in \mathbb{Q}$.

Definiujemy teraz ciąg $x_n = a + b\sqrt{2} + (1 - \sqrt{2})^n$. Ponieważ $|1 - \sqrt{2}| < 1$, więc
$$\lim_{n\to\infty} x_n = a + b\sqrt{2} = x_0.$$
Korzystając z własności funkcji σ, mamy:
$$\sigma(x_n) = \sigma\big(a + b\sqrt{2} + (1 - \sqrt{2})^n\big) = a - b\sqrt{2} + (1 + \sqrt{2})^n.$$

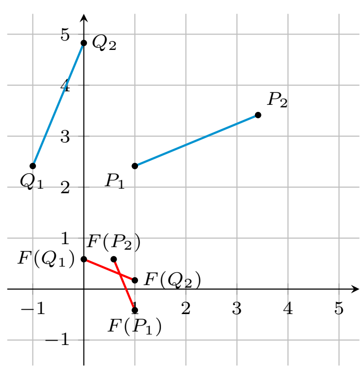
Ponieważ $1+\sqrt{2}>1$, więc ciąg $(\sigma(x_n))$ jest rozbieżny. Zatem:
$$\sigma(x_n)\not\to\sigma(x_0).$$
Dowiedliśmy więc, że σ jest nieciągła w dowolnie wybranym punkcie $x_0\in K$.

Spróbujemy teraz zbadać funkcję σ pod względem geometrycznym. W tym celu potrzebujemy odpowiednika funkcji σ zdefiniowanego na „płaszczyźnie”. Niech więc $F: K^2\to K^2$ będzie dla $x,y\in K$ określone wzorem:
$$F(x,y)=(\sigma(x),\sigma(y)).$$
Tak zdefiniowane F ma bardzo ciekawe, paradoksalne wręcz, własności. Z jednej strony F jest bardzo nieregularne, bo wszędzie nieciągłe, co wynika z wyżej udowodnionej nieciągłości σ.

Z drugiej jednak strony F jest bardzo regularne, gdyż jest addytywne. Otóż dla $x_1,y_1,x_2,y_2\in K$ mamy:
$$\begin{aligned}F((x_1,y_1)+(x_2,y_2))&=F(x_1+x_2,y_1+y_2)=(\sigma(x_1+x_2),\sigma(y_1+y_2))\\&=(\sigma(x_1)+\sigma(x_2),\sigma(y_1)+\sigma(y_2))=F(x_1,y_1)+F(x_2,y_2).\end{aligned}$$
Analogicznie możemy uzasadnić, że dla dowolnych $\alpha,x_1,x_2\in K$ zachodzi $F(\alpha\cdot(x_1,x_2))=\sigma(\alpha)\cdot F(x_1,x_2)$.

Co dla nas najważniejsze, z geometrycznego punktu widzenia F zachowuje pewne podstawowe własności geometryczne. Po pierwsze, F zachowuje współliniowość punktów. Wynika to z faktu, że jeśli $X=(x_1,x_2)$, $Y=(y_1,y_2)$ i $Z=(z_1,z_2)$ są współliniowymi punktami z K^2, to $X-Y=\alpha\cdot(X-Z)$ dla pewnej liczby $\alpha\in K$, a stąd $F(X)-F(Y)=\sigma(\alpha)\cdot\big(F(X)-F(Z)\big)$. Dlatego obrazami prostych (w obcięciu do K^2) w przekształceniu F są proste. Ponieważ jednak funkcja σ może zmienić znak lub zamienić liczbę o module większym od 1 na taką o module mniejszym od 1 (np. dla $\alpha=1+\sqrt{2}$), obrazami odcinków nie są odcinki.

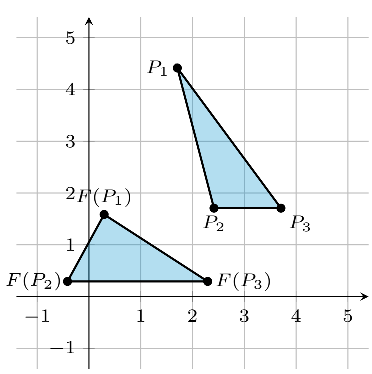
Ponadto F zachowuje **równość odległości**, czyli dla $X,Y,Z,T\in K^2$ mamy:
$$(1)\qquad d(X,Y)=d(Z,T)\implies d(F(X),F(Y))=d(F(Z),F(T)),$$
gdzie przez $d(\cdot,\cdot)$ oznaczamy euklidesową odległość na płaszczyźnie. Sprawdzenie jest proste. Niech $X=(x_1,x_2), Y=(y_1,y_2), Z=(z_1,z_2), T=(t_1,t_2)$. Ponieważ $d((x_1,x_2),(y_1,y_2))=d((z_1,z_2),(t_1,t_2))$, więc
$$(y_1-x_1)^2+(y_2-x_2)^2=(t_1-z_1)^2+(t_2-z_2)^2.$$
Do obu stron przykładamy funkcję σ:
$$(\sigma(y_1)-\sigma(x_1))^2+(\sigma(y_2)-\sigma(x_2))^2=(\sigma(t_1)-\sigma(z_1))^2+(\sigma(t_2)-\sigma(z_2))^2.$$
Zatem
$$d(F(X),F(Y))=d(F(Z),F(T)).$$



Rys. 1

To, że F zachowuje równość odległości, nie oznacza jednak, że jest izometrią. Na przykład dla punktów $P_1=(1,1+\sqrt{2}), P_2=(2+\sqrt{2},2+\sqrt{2})$, $Q_1=(-1,1+\sqrt{2}), Q_2=(0,2+2\sqrt{2})$ mamy $d(P_1,P_2)=d(Q_1,Q_2)$. Ale na mocy (1) mamy też $d(F(P_1),F(P_2))=d(F(Q_1),F(Q_2))$, jednakże, jak można zobaczyć na rysunku 1 (lub obliczyć), $d(P_1,P_2)\neq d(F(P_1),F(P_2))$.

Poza tym F zachowuje prostopadłość wektorów. Niech $X,Y,Z\in K^2$ i załóżmy, że $\sphericalangle YXZ=90^\circ$, czyli $\langle X-Y,X-Z\rangle=0$:
$$(x_1-y_1)(x_1-z_1)+(x_2-y_2)(x_2-z_2)=0.$$
Po przyłożeniu funkcji σ do obu stron otrzymujemy:
$$\big(\sigma(x_1)-\sigma(y_1)\big)\big(\sigma(x_1)-\sigma(z_1)\big)+\big(\sigma(x_2)-\sigma(y_2)\big)\big(\sigma(x_2)-\sigma(z_2)\big)=\sigma(0)=0,$$
czyli
$$\sphericalangle F(Y)F(X)F(Z)=90^\circ.$$



Rys. 2. Przekształcenie F może zamienić wierzchołki trójkąta ostrokątnego na rozwartokątnego. Na powyższym rysunku mamy $P_1=(1+\frac{\sqrt{2}}{2},3+\sqrt{2})$, $P_2=(1+\sqrt{2},1+\frac{\sqrt{2}}{2})$, $P_3=(3+\frac{\sqrt{2}}{2},1+\frac{\sqrt{2}}{2})$

W ogólności przekształcenie F nie zachowuje jednak kątów między prostymi, co ilustruje rysunek 2.

Przekształcenie F godzi w sobie sprzeczne natury: *dziką* naturę analityczną (nigdzie nie jest ciągłe) i *łagodną* naturę algebraiczno-geometryczną (jest addytywne, zachowuje równość odległości i prostopadłość wektorów). Zachęcam Czytelnika do własnych badań nad jego własnościami!