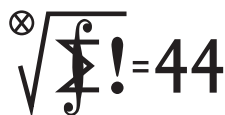


Klub 44 M



Czołówka ligi zadaniowej **Klub 44 M**
po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań
891 ($WT = 1,36$) i 892 ($WT = 2,14$)
z numeru 12/2024

Krzysztof Zygan	Lubin	43,39
Andrzej Kurach	Ryjewo	43,21
Janusz Olszewski	Warszawa	40,67
Michał Warmuz	Żywiec	40,04
Marcin Kasperski	Warszawa	39,14
Andrzej Daniluk	Warszawa	37,89
Grzegorz Wiączkowski		36,58
Marek Spychała	Warszawa	35,24
Marian Łupieżowiec	Gliwice	34,85
Krzysztof Kamiński	Pabianice	34,36
Piotr Wiśniewski	Warszawa	33,97
Krzysztof Maziarz	Londyn	33,32

Redaguje Marcin E. KUCZMA

Rozwiązania zadań z numeru 3/2025

Przypominamy treść zadań:

897. Czworokąt wypukły $ABCD$ ma obwód długości p oraz przekątne długości m i n . Punkt E jest czwartym wierzchołkiem równoległoboku $ABCE$. Udowodnić, że $DE \leq p - m - n$.

898. Wyznaczyć wszystkie pary liczb naturalnych $m, n \geq 1$, dla których wielomian $W(x) = x^m + x^n + 1$ jest podzielny przez trójmian $T(x) = x^2 + x + 1$.

897. Na płaszczyźnie zespolonej punkty A, B, C, D, E są reprezentowane przez liczby a, b, c, d, e (położenie punktu 0 nie ma znaczenia). Mamy udowodnić nierówność $p \geq m + n + DE$, czyli

$$(1) \quad |a - b| + |b - c| + |c - d| + |d - a| \geq |a - c| + |b - d| + |d - e|.$$

Przyjmijmy oznaczenia: $a - b = x$, $b - c = y$, $c - d = z$. Wówczas

$$a - d = x + y + z; \quad a - e = y$$

(skorzystaliśmy z założenia, że $ABCE$ to równoległobok);

$$e - d = (a - d) - (a - e) = x + z.$$

Wprowadzamy te oznaczenia do (1) i dostajemy do udowodnienia nierówność

$$(2) \quad |x| + |y| + |z| + |x + y + z| \geq |x + y| + |y + z| + |z + x|.$$

Wobec jednorodności można przyjąć, że $x + y + z = 1$ (ta suma nie może być zerowa, bo $a \neq d$). To sprowadza nierówność (2) do postaci

$$|x| + |y| + |z| + 1 \geq |1 - z| + |1 - x| + |1 - y|.$$

Obie strony są nieujemne. Podnosząc je do kwadratu, uzyskamy (do dowodu) nierówność równoważną:

$$(3) \quad \sum |x|^2 + 2 \sum |xy| + 2 \sum |x| + 1 \geq \sum |1 - x|^2 + 2 \sum |(1 - x)(1 - y)|$$

(symbol $\sum$ oznacza sumowanie cykliczne w zmiennych x, y, z). Zauważając, że $(1 - x)(1 - y) = xy + z$, przekształcamy (3) do postaci kolejno równoważnych:

$$\sum |x|^2 + 2 \sum |xy| + 2 \sum |z| + 1 \geq \sum (1 - 2\operatorname{Re} x + |x|^2) + 2 \sum |xy + z|;$$

$$2 \sum (|xy| + |z|) + 1 \geq 3 - 2 \sum \operatorname{Re} x + 2 \sum |xy + z|;$$

$$2 \sum (|xy| + |z| - |xy + z|) \geq 2(1 - \sum \operatorname{Re} x).$$

Ostatnia nierówność jest banalnie prawdziwa: lewa strona jest nieujemna, a prawa jest równa zero, bo $\sum x = 1$. To dowodzi słuszności nierówności we wszystkich wcześniejszych postaciach, więc i tezy (1).

[*Uwaga.* Nierówność (2) zachodzi dla *każdej* trójki liczb zespolonych, jak pokazuje przeprowadzony rachunek. Kontekst geometryczny służy jako jej interpretacja. Zbędne jest założenie wypukłości czworokąta; to może być dowolna linia łamana $ABCD$, nawet z fragmentami pokrywającymi się. Proponujemy Czytelnikom, jako ćwiczenie, rozpoznanie sytuacji, gdy (2) staje się równością.]

898. Trójmian T rozkłada się na czynniki liniowe $T(x) = (x - \alpha)(x - \beta)$, gdzie $\alpha = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{3}i$, $\beta = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{3}i$. Zatem W dzieli się przez T wtedy i tylko wtedy, gdy dzieli się przez $(x - \alpha)$ i $(x - \beta)$; równoważnie (tw. Bézout) – gdy

$$(4) \quad W(\alpha) = 0, \quad W(\beta) = 0.$$

Istotne są reszty z dzielenia m, n przez 3:

$$(5) \quad \alpha^m = \begin{cases} 1 & \text{gdy } m \equiv 0 \pmod{3}, \\ \alpha & \text{gdy } m \equiv 1 \pmod{3}, \\ \beta & \text{gdy } m \equiv 2 \pmod{3}, \end{cases} \quad \text{i podobnie } \alpha^n, \beta^m, \beta^n.$$

Jeśli m dzieli się przez 3, to $W(\alpha) = \alpha^m + \alpha^n + 1 = 2 + \alpha^n \neq 0$, warunek (4) nie jest spełniony; podobnie wykluczamy przypadek, w którym n dzieli się przez 3. Pozostają $m, n \equiv 1, 2 \pmod{3}$. Łatwo teraz ze wzoru (5) uzyskać ostateczną odpowiedź: warunek (4) (równoważny podzielności wielomianu W przez T) jest spełniony wtedy i tylko wtedy, gdy $m \equiv 1$, $n \equiv 2 \pmod{3}$ lub $m \equiv 2$, $n \equiv 1 \pmod{3}$.



Klub 44 F



Czołówka ligi zadaniowej **Klub 44 F**
po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań
788 ($WT = 2,37$), 789 ($WT = 1,99$)
z numeru 12/2024

Tomasz Wietecha (Tarnów) 18–44+3,02
Jacek Konieczny (Poznań) 41,11
Jan Zambrzycki (Białystok) 4–31,23
Andrzej Nowogrodzki
(Chocianów) 3–29,48

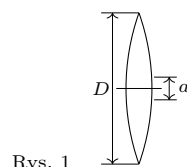
Redaguje Elżbieta ZAWISTOWSKA

Rozwiązania zadań z numeru 3/2025

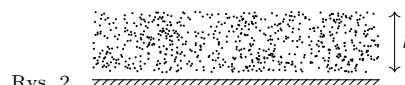
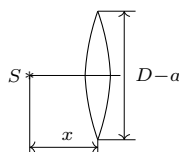
Przypominamy treść zadań:

794. Z soczewki skupiającej o ogniskowej $f = 50$ cm i średnicy $D = 5$ cm wycięto środkowy pasek o szerokości 5 mm, a pozostałe części złożono ze sobą (rys. 1). W odległości $x = 75$ cm od soczewki umieszczono punktowe źródło światła monochromatycznego S . Korzystając z przybliżenia małych kątów, znaleźć maksymalną liczbę prążków obrazu interferencyjnego, jaka może powstać na ekranie za soczewką. Długość fali świetlnej $\lambda = 5 \cdot 10^{-7}$ m.

795. Izolowaną metalową, początkowo nienaladowaną płytkę oświetlano w czasie τ światłem nadfioletowym. W wyniku tego z płytki wyleciała chmura elektronów, których prędkość początkowa była prostopadła do płytki i miała wartość v_0 . Całkowita liczba elektronów, które wyleciały z jednostki powierzchni, wynosi n , elektron ma ładunek e i masę m . Znaleźć grubość chmury h po czasie t od zakończenia naświetlania (rys. 2).

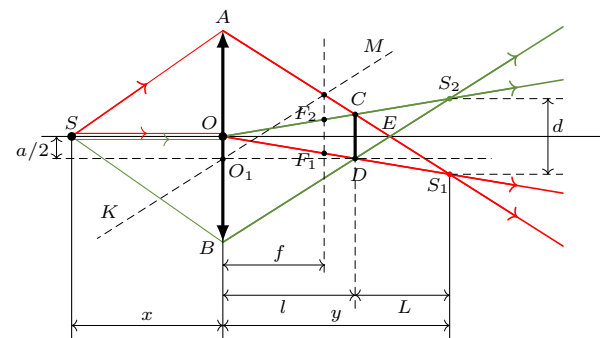


Rys. 1



Rys. 2

794. Soczewka z wyciętym paskiem dzieli światło ze źródła S na dwie wiązki. Tam, gdzie wiązki przecinają się, możemy obserwować prążki interferencyjne (rys. 3).



Górna część obciętej soczewki daje obraz S_1 źródła S (promień AS_1 przecina równoległy do SA promień KO_1 w punkcie M płaszczyzny ogniskowej). Obraz S_2 źródła w dolnej części soczewki leży po drugiej stronie osi układu i jest spójny z S_1 . Obszar przecięcia wiązek znajduje się między soczewką oraz punktem E

przecięcia promieni AS_1 i BS_2 . W odległości l od soczewki przekrój tego obszaru jest największy.

W przybliżeniu małych kątów w odległości L od odcinka S_1S_2 możemy obserwować $N = |CD|/\Delta x$ jasnych prążków, gdzie $\Delta x = \lambda L/d$ jest szerokością prążka, a d to długość odcinka S_1S_2 .

Gdy płaszczyzna obserwacji oddala się od soczewki, szerokość prążków maleje. Szerokość obszaru przecięcia wiązek rośnie przed płaszczyzną CD , a następnie maleje szybciej niż szerokość prążka. Maksymalną liczbę prążków obserwujemy więc w płaszczyźnie CD .

Z podobieństwa trójkątów OCD i OF_1F_2 :

$$|CD| = al/f, \quad N = ald/f\lambda L.$$

Z podobieństwa trójkątów S_1S_2C i AOC :

$$l/L = (D-a)/2d.$$

Szukana maksymalna liczba prążków na ekranie:

$$N = a(D-a)/2f\lambda = 450.$$

795. Płytkę i chmura elektronów tworzą kondensator płaski. Pole między okładkami ma natężenie $E = \frac{en}{\epsilon_0}$. Na górnej granicy chmury prędkość elektronów wynosi v_0 , na dolnej ich przyspieszenie ma wartość $a = \frac{eE}{m} = \frac{e^2n}{(m\epsilon_0)}$. Do chwili t górne elektrony przebędą drogę $h_1 = v_0(\tau + t)$, a dolne $h_2 = v_0t - \frac{at^2}{2}$, stąd szukana grubość chmury:

$$h = h_2 - h_1 = v_0\tau + \frac{e^2nt^2}{2m\epsilon_0}, \quad \text{gdy } t < \frac{2v_0}{a}.$$

Po czasie $t_0 = \frac{2v_0}{a}$ dolne elektrony zaczną wracać na płytkę, a górne nie zmieniają swego ruchu, zatem dla czasu $t \geq \frac{2v_0}{a}$ grubość chmury $h = v_0(t + \tau)$.

Skrót regulaminu

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru n w terminie do końca miesiąca $n + 2$. Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze $n + 4$. Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przysyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**. Można je przysyłać również pocztą elektroniczną pod adresem delta@mimuw.edu.pl (preferujemy pliki pdf). Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez

współczynnik trudności danego zadania: $WT = 4 - 3S/N$, przy czym S oznacza sumę ocen za rozwiązania tego zadania, a N – liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (**M** lub **F**) – i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu 44 punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (**M** lub **F**), zostaje on członkiem **Klubu 44**, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo – to tytuł **Weterana**. Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 2/2002 oraz znajduje się na stronie deltami.edu.pl.