

O znanych i lubianych nierównościach (w niecodziennych okolicznościach)

Sławomir DINEW*

* Wydział Matematyki i Informatyki,
Uniwersytet Jagielloński

„Szok! Piosenkarz X zmienił fryzurę. Musisz to zobaczyć!”. „Mamy to! Aktorka Y sfotografowana bez makijażu. Wygląda niesamowicie!”. Tego typu tytuły coraz częściej spotykamy w Internecie. Okazuje się, że zwiększają one tak zwaną *klikalność*. Pokazują także nasze zainteresowanie zmianami, choćby i powierzchownymi. W tym tekście, idąc za modą, wprowadzimy pewną modyfikację do klasycznych nierówności matematycznych i przeanalizujemy, co z niej wynika.

Czytelnik obeznany z literaturą nierównościową z pewnością zauważył, że gros tychże wyników zaczyna się mniej więcej tak: *Niech $x_1, \dots, x_n$ będą dodatnimi*. . . Otóż wszelkie nierówności pomiędzy średnimi (oraz wiele, wiele innych) zachodzą **wyłącznie** dla liczb nieujemnych. No właśnie. . .

W tym tekście anonsonowana modyfikacja będzie polegać na zamianie liczb dodatnich na pewną klasę **macierzy** – ograniczymy się tylko do macierzy wymiaru 2 na 2. *Ale jak porównać dwie macierze?* – zapyta pewnie Czytelnik. Po kolei.

Zacznijmy od podstawowych operacji i własności. Mając dwie macierze: $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ oraz $B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$, można je dodać (bądź odjąć) *komórka po komórce*, czyli symbolicznie:

$$A \pm B := \begin{pmatrix} a_{11} \pm b_{11} & a_{12} \pm b_{12} \\ a_{21} \pm b_{21} & a_{22} \pm b_{22} \end{pmatrix}.$$

Mnożenie jest nieco trudniejsze. Stosowny wzór wygląda następująco:

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \end{pmatrix}.$$

A nie lepiej wymnażać komórka po komórce? – zapyta Czytelnik. Otóż takie, a nie inne reguły gry narzuca nam dział matematyki o nazwie *algebra liniowa*.

Mamy już trzy z czterech podstawowych działań arytmetycznych. Co z dzieleniem? Tak samo jak w przypadku liczb, nie zawsze da się je wykonać. Warunkiem koniecznym i wystarczającym istnienia *macierzy odwrotnej* do macierzy $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ jest, by wyznacznik macierzy A , dany wzorem $\det A := a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$, był niezerowy. Wtedy

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix}$$

(mnożenie macierzy przez liczbę wykonujemy, mnożąc każdą komórkę przez tę liczbę).

Jak łatwo zauważyć, $AA^{-1} = A^{-1}A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} =: I$. Macierz I odgrywa w naszym świecie rolę jedynki, pomnożenie przez nią (z każdej strony) nic nie zmienia.

No dobrze, ale póki co mamy samą algebrę. Gdzie tu nierówności? Aby przejść już do meritum, będziemy rozpatrywać wyłącznie macierze **symetryczne**, czyli takie A , dla których $a_{12} = a_{21}$.

Definicja: Mówimy, że symetryczna macierz A jest dodatnio określona (i piszemy $A > 0$), jeżeli $a_{11} + a_{22} > 0$ oraz $\det A > 0$.

Mówimy, że macierz jest nieujemnie określona (i piszemy $A \geq 0$), gdy w powyższej definicji nierówności ostre $>$ zamienimy na nieostre $\geq$. Ogólniej mamy $A > B$, gdy $A - B > 0$, oraz $A \geq B$, gdy $A - B \geq 0$.

Inny (równoważny) sposób zdefiniowania nierówności $A > 0$ wykorzystuje tzw. *formy kwadratowe*: $A \geq 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy forma kwadratowa związana z A , czyli przekształcenie $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ dane wzorem

$$\mathbb{R}^2 \ni (x_1, x_2) \mapsto a_{11}x_1x_1 + a_{12}x_1x_2 + a_{21}x_2x_1 + a_{22}x_2x_2 =: Q_A(x_1, x_2) \in \mathbb{R}$$

Macierzą nazywamy tabliczkę wypełnioną liczbami, np. $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$.

Reguła dla mnożenia jest następująca: aby dostać element na pozycji (i, j) , mnożymy skalarnie i -ty wiersz A z j -tą kolumną B . **Uwaga:** mnożenie **nie musi** być przemienne:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \text{ ale } \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

W algebrze liniowej macierz A interpretujemy jako **odwzorowanie liniowe** z $\mathbb{R}^2$ w $\mathbb{R}^2$, które przekształca wektor (x, y) w wektor $(a_{11}x + a_{12}y, a_{21}x + a_{22}y)$. Wtedy zdefiniowane tutaj mnożenie macierzy odpowiada *składaniu* odpowiadających im odwzorowań.

Dla miłośników tekstów zawierających *mądre słowa*: oznacza to, że macierze 2 na 2 tworzą *pierścień z jedynką*.

W świecie macierzy jest tak jak i w naszym: kamery skierowane są tylko w kierunku niezlicznego grona celebrytów. . .

Korzystając z symetrii A , wzór na $Q_A(x, y)$ można zapisać oszczędnie jako $a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2$, ale wzór przywołany w tekście czytelniej wskazuje na związek z *formą dwuliniową*: $a_{11}x_1y_1 + a_{12}x_1y_2 + a_{21}x_2y_1 + a_{22}x_2y_2$.

Jak Czytelnik zapewne zauważył, dodatnia określoność jest niezwykle podobna do własności iloczynu skalarnego. Można więc powiedzieć, że $A > 0$, o ile A zadaje uogólniony iloczyn skalarny na $\mathbb{R}^2$. Sprawdzenie równoważności definicji $A > 0$ pozostawiamy Czytelnikowi.

Ogólniej, dla funkcji f o wartościach rzeczywistych macierz $f(A)$ **definiujemy** wzorem znajdującym się w tekście obok, o ile tylko A_1 oraz A_2 należą do dziedziny f .



spełnia dla każdego $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ nierówność $Q_A(x_1, x_2) \geq 0$. Jeżeli ponadto równość zachodzi tylko dla $(x_1, x_2) = (0, 0)$, to $A > 0$. Łatwo stąd wywnioskować, że suma dodatnio określonych macierzy jest dodatnia.

W praktyce przydatny jest następujący standardowy zestaw faktów z algebry liniowej, który Czytelnik Zaciekawiony może potraktować jako ambitne zadanie:

Zestaw faktów

1. Dla dowolnej macierzy symetrycznej A wymiaru 2 na 2 istnieje kąt $\alpha \in [0, 2\pi)$ oraz takie liczby A_1, A_2 , że A ma przedstawienie

$$A = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}.$$

Ta groźnie wyglądająca formułka mówi nam, że A jest *diagonalna* z dokładnością do obrotu.

2. Zachodzi $A > 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy we wzorze powyżej $A_1, A_2 > 0$. Podobnie $A \geq 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy $A_1, A_2 \geq 0$.

3. Dla dowolnego wielomianu $p(x)$ zachodzi

$$p(A) = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p(A_1) & 0 \\ 0 & p(A_2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix},$$

przy czym wartość $p(A)$ definiujemy, wstawiając macierz A w miejsce zmiennej x i zwyczajne mnożenie zamieniając na mnożenie macierzy. Uff, dość już definicji! Przejdźmy do czegoś konkretnego. Zastanówmy się, wzorując się na liczbach, czy dla dowolnej macierzy symetrycznej 2 na 2 zachodzi $A^2 \geq 0$. Można to sprawdzić z definicji (Czytelnik zechce potraktować to jako kolejne ćwiczenie) lub skorzystać z podanych faktów. Mianowicie, biorąc rozkład A podany powyżej, otrzymujemy

$$A^2 = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1^2 & 0 \\ 0 & A_2^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}.$$

Skoro więc wyrazy na przekątnej macierzy pośrodku są nieujemne jako kwadraty, to mamy $A^2 \geq 0$.

A jak będzie z e^A ? Czy zawsze zachodzi $e^A \geq 0$? TAK, z tego samego powodu! A czy $\ln(A) \geq 0$, o ile $A - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \geq 0$? Odpowiedź znowu jest pozytywna, ale po drodze trzeba skorzystać z równości zachodzącej dla każdego kąta α

$$\begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Wygląda na to, że półtorej strony dotychczasowych modyfikacji doprowadziło tylko do znanych nam z analizy nierówności. Trochę to nudne... ale nie poddajemy się! Weźmy na warsztat odpowiednik znanej liczbowej nierówności $A^2 \geq B^2$, o ile $A \geq B \geq 0$. Czy jest ona prawdziwa? Otóż... NIE! Weźmy $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2025 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2024 \end{pmatrix}$. Wtedy

$$A - B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \geq 0, \quad \text{ale} \quad A^2 - B^2 = \begin{pmatrix} 2 & 2026 \\ 2026 & 4050 \end{pmatrix} \not\geq 0,$$

bo $2 \cdot 4050 - 2026^2$ jest (bardzo) ujemne.

Oznacza to, że $A \mapsto A^2$ nie jest funkcją monotonicznie rosnącą dla macierzy nieujemnie określonych. A jak to wygląda dla innych potęg? Częściowej odpowiedzi na to pytanie dostarcza **nierówność Löwnera–Heinza**:

$$\forall p \in (0, 1], \quad A \geq B \geq 0 \implies A^p \geq B^p.$$

Nierówność Löwnera–Heinza nie posiada (znanego mi) krótkiego i jednocześnie elementarnego dowodu. Główna trudność wynika oczywiście z tego, że kąt α dla A i odpowiedni kąt dla B nie muszą być tożsame.

Przejdźmy wreszcie do deseru, czyli do klasycznych nierówności pomiędzy średnimi. Czy na przykład dla $A, B \geq 0$ zachodzi

$$\frac{1}{2}(A + B) \leq \sqrt{\frac{1}{2}(A^2 + B^2)}?$$

Policzmy:

$$\frac{1}{2}(A^2 + B^2) - \left(\frac{1}{2}(A + B)\right)^2 = \frac{1}{4}(A^2 + B^2 - AB - BA) = \frac{1}{4}(A - B)^2 \geq 0$$

i nierówność Löwnera–Heinza dla $p = \frac{1}{2}$ da nam (pozytywną) odpowiedź.

Warto też zastanowić się nad sytuacją jednowymiarową: jaka jest najmniejsza wartość funkcji $f(x) = ax^2 + b(1-x)^2$ dla dodatnich a oraz b ?

Dla przykładu: iloczyn $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$ nie jest symetryczny.

A jak będzie z nierównością pomiędzy średnią arytmetyczną a średnią harmoniczną? Pytamy o nierówność

$$\forall A, B \geq 0, \quad 2(A^{-1} + B^{-1})^{-1} \leq \frac{1}{2}(A + B).$$

Okazuje się, że również i ta nierówność jest prawdziwa. Aby to wykazać, potrzebujemy następującego wzoru:

$$Q_{(A^{-1}+B^{-1})^{-1}}(z_1, z_2) = \min \{Q_A(x_1, x_2) + Q_B(y_1, y_2)\},$$

gdzie minimum brane jest po wszystkich możliwych wektorach $(x_1, x_2), (y_1, y_2)$ spełniających $(x_1, x_2) + (y_1, y_2) = (z_1, z_2)$. Uzbrojeni w tę tajemną wiedzę zauważmy, że wystarczy pokazać nierówność

$$\forall (z_1, z_2), \quad Q_{4(A^{-1}+B^{-1})^{-1}}(z_1, z_2) \leq Q_{(A+B)}(z_1, z_2).$$

Ale rozkładając (z_1, z_2) jako sumę $\frac{1}{2}(z_1, z_2) + \frac{1}{2}(z_1, z_2)$, dostaniemy

$$Q_{4(A^{-1}+B^{-1})^{-1}}(z_1, z_2) \leq Q_A(z_1, z_2) + Q_B(z_1, z_2) = Q_{A+B}(z_1, z_2),$$

co kończy dowód.

Na koniec ciekawostka (a właściwie to ploteczka): znana nam celebrytka w krainie nierówności – średnia geometryczna – jest niezwykle kapryśna w naszym nowym świecie. Problem polega na tym, że iloczyn AB dwóch symetrycznych macierzy wcale symetryczny być nie musi.

Problem ten można rozwiązać na różne sposoby, dostając różne *średnie geometryczne*. Jednym ze sposobów jest wzięcie

$$\exp\left(\frac{\ln A + \ln B}{2}\right).$$

Da nam to macierz symetryczną (dlaczego?), niestety z pewnymi mankamentami. Okazuje się, że *najlepszym* wyborem (dla $A, B > 0$) jest średnia

$$A \sharp B := A^{1/2}(A^{-1/2}BA^{-1/2})^{1/2}A^{1/2}.$$

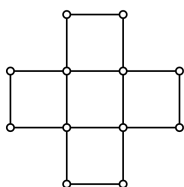
Ten wzór, uczciwie pisząc, nie wygląda elegancko – na pocieszenie warto wspomnieć, że dla trzech czy więcej macierzy ich średnia geometryczna wygląda dużo, dużo gorzej... Za to brak urody nadrabia innymi walorami, np. zachodzą jakże oczekiwane nierówności:

$$2(A^{-1} + B^{-1})^{-1} \leq A \sharp B \leq \frac{1}{2}(A + B).$$

Informacje o tym i o wielu innych wynikach dotyczących analizy na macierzach Czytelnik znajdzie w książce F. Hiai, D. Petz: *Introduction to Matrix Analysis and Applications*. Życzę miłej dalszej lektury!



Zadania



Rys. 1

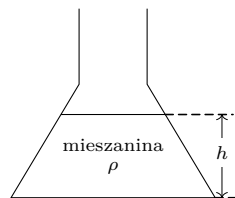
Przygotował Dominik BUREK

M 1822. Rozstrzygnąć, jaka jest największa możliwa liczba rozłącznych pentomino w kształcie plusa (rys. 1), które można położyć na szachownicy 8×8 tak, by boki pentomino były równoległe do boków szachownicy.

M 1823. Udowodnić, że dowolny wielokąt wypukły można podzielić na trapezy równoramienne.

M 1824. Dany jest ciąg $(a_n)_{n \geq 1}$ zdefiniowany przez warunki $a_1 = 1$ oraz $a_{2n} = a_n$ i $a_{2n+1} = a_n + a_{n+1}$ dla $n \geq 1$. Udowodnić, że każda liczba wymierna dodatnia występuje dokładnie raz w ciągu $(\frac{a_n}{a_{n+1}})_{n \geq 1}$.

Przygotował Andrzej MAJHOFER



Rys. 2

F 1123. W naczyniu o kształcie ściętego stożka (rys. 2) początkowo znajduje się jednorodna mieszanina dwóch cieczy o różnych gęstościach. Po pewnym czasie ciecz rozdziela się i lżejsza (o mniejszej gęstości) zbiera się w górnej części naczynia. Czy w wyniku tego procesu zmienia się ciśnienie na dno naczynia? Przyjmujemy, że całkowita objętość cieczy przed i po ich rozdzieleniu pozostaje niezmienną. Przyspieszenie ziemskie wynosi g .

F 1124. Oszacuj, jakiej średnio energii, ε , potrzeba do „wyrwania” pojedynczej cząsteczki z powierzchni (ciekłej) wody. Ciepło parowania wody wynosi $L = 2257 \text{ J/g}$, masa atomowa wodoru $\mu_H = 1 \text{ g}$, masa atomowa tlenu $\mu_O = 16 \text{ g}$, a stała Avogadro: $N_A = 6,022 \cdot 10^{23}$.

Rozwiązania na str. 24