

Warto też zastanowić się nad sytuacją jednowymiarową: jaka jest najmniejsza wartość funkcji $f(x) = ax^2 + b(1-x)^2$ dla dodatnich a oraz b ?

Dla przykładu: iloczyn $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$ nie jest symetryczny.

A jak będzie z nierównością pomiędzy średnią arytmetyczną a średnią harmoniczną? Pytamy o nierówność

$$\forall A, B \geq 0, \quad 2(A^{-1} + B^{-1})^{-1} \leq \frac{1}{2}(A + B).$$

Okazuje się, że również i ta nierówność jest prawdziwa. Aby to wykazać, potrzebujemy następującego wzoru:

$$Q_{(A^{-1}+B^{-1})^{-1}}(z_1, z_2) = \min \{Q_A(x_1, x_2) + Q_B(y_1, y_2)\},$$

gdzie minimum brane jest po wszystkich możliwych wektorach $(x_1, x_2), (y_1, y_2)$ spełniających $(x_1, x_2) + (y_1, y_2) = (z_1, z_2)$. Uzbrojeni w tę tajemną wiedzę zauważmy, że wystarczy pokazać nierówność

$$\forall (z_1, z_2), \quad Q_{4(A^{-1}+B^{-1})^{-1}}(z_1, z_2) \leq Q_{(A+B)}(z_1, z_2).$$

Ale rozkładając (z_1, z_2) jako sumę $\frac{1}{2}(z_1, z_2) + \frac{1}{2}(z_1, z_2)$, dostaniemy

$$Q_{4(A^{-1}+B^{-1})^{-1}}(z_1, z_2) \leq Q_A(z_1, z_2) + Q_B(z_1, z_2) = Q_{A+B}(z_1, z_2),$$

co kończy dowód.

Na koniec ciekawostka (a właściwie to ploteczka): znana nam celebrytka w krainie nierówności – średnia geometryczna – jest niezwykle kapryśna w naszym nowym świecie. Problem polega na tym, że iloczyn AB dwóch symetrycznych macierzy wcale symetryczny być nie musi.

Problem ten można rozwiązać na różne sposoby, dostając różne *średnie geometryczne*. Jednym ze sposobów jest wzięcie

$$\exp\left(\frac{\ln A + \ln B}{2}\right).$$

Da nam to macierz symetryczną (dlaczego?), niestety z pewnymi mankamentami. Okazuje się, że *najlepszym* wyborem (dla $A, B > 0$) jest średnia

$$A \sharp B := A^{1/2}(A^{-1/2}BA^{-1/2})^{1/2}A^{1/2}.$$

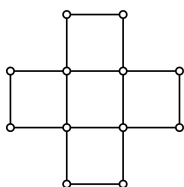
Ten wzór, uczciwie pisząc, nie wygląda elegancko – na pocieszenie warto wspomnieć, że dla trzech czy więcej macierzy ich średnia geometryczna wygląda dużo, dużo gorzej... Za to brak urody nadrabia innymi walorami, np. zachodzą jakże oczekiwane nierówności:

$$2(A^{-1} + B^{-1})^{-1} \leq A \sharp B \leq \frac{1}{2}(A + B).$$

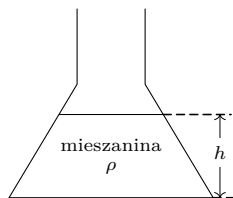
Informacje o tym i o wielu innych wynikach dotyczących analizy na macierzach Czytelnik znajdzie w książce F. Hiai, D. Petz: *Introduction to Matrix Analysis and Applications*. Życzę miłej dalszej lektury!



Zadania



Rys. 1



Rys. 2

Przygotował Dominik BUREK

M 1822. Rozstrzygnąć, jaka jest największa możliwa liczba rozłącznych pentomino w kształcie plusa (rys. 1), które można położyć na szachownicy 8×8 tak, by boki pentomino były równoległe do boków szachownicy.

M 1823. Udowodnić, że dowolny wielokąt wypukły można podzielić na trapezy równoramienne.

M 1824. Dany jest ciąg $(a_n)_{n \geq 1}$ zdefiniowany przez warunki $a_1 = 1$ oraz $a_{2n} = a_n$ i $a_{2n+1} = a_n + a_{n+1}$ dla $n \geq 1$. Udowodnić, że każda liczba wymierna dodatnia występuje dokładnie raz w ciągu $(\frac{a_n}{a_{n+1}})_{n \geq 1}$.

Przygotował Andrzej MAJHOFER

F 1123. W naczyniu o kształcie ściętego stożka (rys. 2) początkowo znajduje się jednorodna mieszanina dwóch cieczy o różnych gęstościach. Po pewnym czasie cieczy rozdzielają się i lżejsza (o mniejszej gęstości) zbiera się w górnej części naczynia. Czy w wyniku tego procesu zmienia się ciśnienie na dno naczynia? Przyjmujemy, że całkowita objętość cieczy przed i po ich rozdzieleniu pozostaje niezmienną. Przyspieszenie ziemskie wynosi g .

F 1124. Oszacuj, jakiej średnio energii, ε , potrzeba do „wyrwania” pojedynczej cząsteczki z powierzchni (ciekłej) wody. Ciepło parowania wody wynosi $L = 2257 \text{ J/g}$, masa atomowa wodoru $\mu_H = 1 \text{ g}$, masa atomowa tlenu $\mu_O = 16 \text{ g}$, a stała Avogadro: $N_A = 6,022 \cdot 10^{23}$.

Rozwiązania na str. 24

Rozwiązania zadań ze strony 3



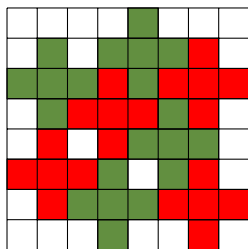
Rozwiązanie zadania M 1822.

Odpowiedź: 8.

Zauważmy, że pentomino mogą zająć jedynie 2 spośród 8 pól w dolnym rzędzie. Istotnie, każde pentomino może zająć tylko jedno pole w tym rzędzie, więc gdyby zajmowały one 3 pola w dolnym rzędzie, to w rzędzie wyżej byłoby zajętych 9 pól – sprzeczność.

Oznacza to, że w sumie mogą być zajęte co najwyżej $6^2 + 4 \cdot 2 = 44$ pola (6^2 wewnętrznych pól i po 2 na każdej z czterech krawędzi). Każde pentomino zajmuje 5 pól, czyli jest co najwyżej $\lfloor \frac{44}{5} \rfloor = 8$ pentomino.

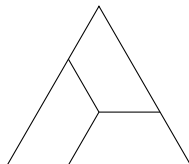
Z drugiej strony nietrudno narysować 8 rozłącznych pentomino na szachownicy 8×8 .



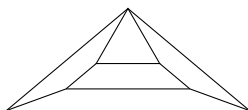
Rozwiązanie zadania M 1823.

Każdy wielokąt możemy podzielić na trójkąty, a każdy trójkąt na trójkąty równoramienne (na przykład opuszczając wysokość do najdłuższego boku trójkąta i potem łącząc spodek tej wysokości ze środkami pozostałych dwóch boków). Zatem wystarczy wskazać podział dowolnego trójkąta równoramiennego ABC ($AB = AC$) na trapezy równoramienne.

Nietrudno znaleźć żądany podział w przypadku, gdy ABC jest równoboczny. Wystarczy ze środka trójkąta poprowadzić trzy półproste równoległe do jego boków.



Jeśli $\angle BAC > 60^\circ$, to możemy go z łatwością podzielić na trójkąt równoboczny i 4 trapezy równoramienne.



Jeśli natomiast $\angle BAC < 60^\circ$, to łącząc wierzchołki tego trójkąta z jego środkiem okręgu opisanego O , uzyskujemy trzy trójkąty, z których dwa są rozwartokątne równoramienne (dla nich stosujemy podział z poprzedniego akapitu) oraz trójkąt równoramienny BOC ($OB = OC$) z kątem przy wierzchołku O równym $2\angle BAC$. Dla tego trójkąta stosujemy wielokrotnie procedurę opisaną w poprzednim lub niniejszym akapicie.



Rozwiązanie zadania M 1824.

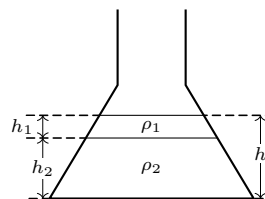
Udowodnimy najpierw, że każda liczba wymierna dodatnia występuje w tym ciągu. Przypuśćmy, że istnieją takie względnie pierwsze liczby p i q , że p/q nie ma w naszym ciągu. Wybierzmy taką parę (p, q) , że $p + q$ jest możliwe najmniejsze. Bez straty ogólności przyjmijmy, że $p > q$ (dowód w drugim przypadku jest analogiczny). Rozważmy parę $(p - q, q)$. Ma ona mniejszą sumę współrzędnych niż (p, q) , istnieje więc takie n , że $a_n = p - q$ i $a_{n+1} = q$. Wówczas $a_{2n+1} = (p - q) + q = p$ oraz $a_{2n+2} = q$. Oznacza to, że $a_{2n+1}/a_{2n+2} = p/q$, i otrzymujemy sprzeczność.

Przypuśćmy teraz, że istnieje taka liczba wymierna, która występuje więcej niż raz w tym ciągu. Wybierzmy taką liczbę p/q , przy czym niech $p + q$ będzie najmniejsze. Bez straty ogólności przyjmijmy, że $q > p$. Łatwo sprawdzić, że w ciągu (a_n) wyrazy o nieparzystych indeksach są większe od obu swoich sąsiadów. Możemy zatem przyjąć: $a_{2n} = p$, $a_{2n+1} = q$ oraz $a_{2m} = p$, $a_{2m+1} = q$ dla pewnych $m, n \geq 1$. Wówczas $a_n = p$, $a_{n+1} = q - p$ oraz $a_m = p$, $a_{m+1} = q - p$. Oznacza to, że liczba $p/(q - p)$ również występuje wielokrotnie w naszym ciągu oraz $p + (q - p) < p + q$, co jest sprzeczne z wyborem pary (p, q) .



Rozwiązanie zadania F 1123.

Przyjmijmy, że przed i po rozdzieleniu cieczy wypełniają naczynie do wysokości h (objętość pozostaje stała).



Po rozdzieleniu cieczy o większej gęstości, ρ_2 , wypełnia dolną część naczynia do wysokości h_2 , a nad nią powstaje warstwa o grubości h_1 cieczy o gęstości $\rho_1 < \rho_2$. Mamy oczywiście $h_1 + h_2 = h$. Przyjmijmy, że objętości cieczy wynoszą, odpowiednio, V_1 i V_2 . Gęstość mieszaniny przed rozdzieleniem wynosi:

$$\rho = \frac{\rho_1 V_1 + \rho_2 V_2}{V_1 + V_2},$$

a ciśnienie na dno:

$$p_p = gh\rho.$$

Po rozdzieleniu cieczy ciśnienie na dno wynosi:

$$p_k = gh_1\rho_1 + gh_2\rho_2.$$

Po prostych obliczeniach otrzymujemy:

$$p_p - p_k = g(\rho_2 - \rho_1) \frac{hV_2 - h_2(V_1 + V_2)}{V_1 + V_2}.$$

Niech promień wewnętrznego przekroju naczynia na wysokości h wynosi r , na wysokości powierzchni rozdziału cieczy $r_1 > r$, a dna $R > r_1$. Korzystając ze wzoru na objętość ściętego stożka, otrzymujemy:

$$hV_2 - h_2(V_1 + V_2) = hh_2((Rr_1 + r_1^2 - Rr - r^2) > 0,$$

a więc podczas rozdzielania cieczy (frakcjonowania) maleje ciśnienie na dno naczynia o kształcie ściętego stożka. Opisany proces ma miejsce np. podczas zbierania się śmietanki na powierzchni mleka.



Rozwiązanie zadania F 1124.

Oderwanie pojedynczej cząsteczki z powierzchni ciekłej wody wymaga zerwania jej wiązań ze wszystkimi cząsteczkami wypełniającymi półprzestrzeń na i pod powierzchnią. To połowa wiązań, jakie należałoby zerwać, „wyrwywać” cząsteczkę z obszaru głęboko pod powierzchnią. Ciepło parowania to energia potrzebna do zamienienia ciekłej wody w gaz praktycznie nieoddziałujących cząsteczek, czyli zerwania wszystkich wiązań między cząsteczkami w całej objętości wody. Ponieważ każde wiązanie łączy dwie cząsteczki, to średnio na jedną cząsteczkę przypada pół energii zerwanego wiązania. Wniosek: wyrwanie pojedynczej cząsteczki z powierzchni wody wymaga w przybliżeniu energii równej energii parowania przypadającej na jedną cząsteczkę. Masa molowa wody (H_2O) wynosi $\mu_w = (2 \cdot 1 + 16) g = 18 g$. Otrzymujemy wartość poszukiwanej energii jako:

$$\varepsilon = \frac{L\mu_w}{N_A}.$$

Liczbowo $\varepsilon \approx 6,75 \cdot 10^{-20} \text{ J/cząsteczkę} \approx 0,42 \text{ eV/cząsteczkę}$.