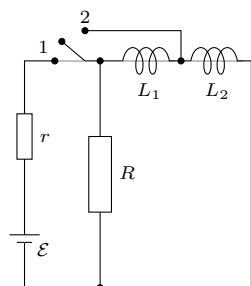


Klub 44 F

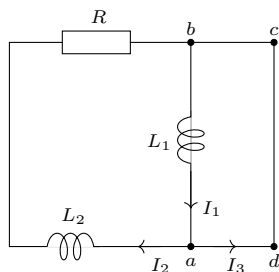


Czołówka ligi zadaniowej **Klub 44 F**
po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań
790 ($WT = 2,32$), 791 ($WT = 2,92$)
z numeru 1/2025

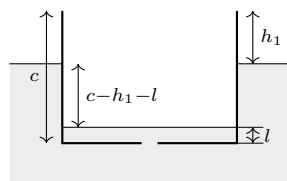
Jacek Konieczny Poznań 41,11
Jan Zambrzycki Białystok 4 – 33,80
Andrzej Nowogrodzki Chocianów 3 – 29,48



Rys. 1



Rys. 2



Rys. 3

Redaguje Elżbieta ZAWISTOWSKA

Rozwiązania zadań z numeru 4/2025

Przypominamy treść zadań:

796. W obwodzie przedstawionym na rysunku 1 klucz zamknięto do położenia 1, a po ustaleniu się prądów bardzo szybko przełączono go do pozycji 2. Przyjmując, że cewki L_1 i L_2 są idealne, wyznaczyć ilość ciepła, jaka wydzielili się na oporniku R po przełączeniu. Siła elektromotoryczna źródła wynosi $\mathcal{E}$, jego opór wewnętrzny r .

797. W środku dna prostopadłościennej barki o długości $a = 80$ m, szerokości $b = 10$ m i wysokości $c = 5$ m powstał otwór o średnicy $d = 1$ cm. Ocenic czas, po którym barka zatoni, jeśli nie będzie odpompowywana z niej woda. Barka jest otwarta z góry, nie ma żadnego ładunku, początkowa wysokość burty nad poziomem wody wynosi $h = 3,75$ m.

796. Przed przełączeniem klucza przez cewki L_1 i L_2 płynie prąd o natężeniu $I = \mathcal{E}/r$. Ponieważ cewki są idealne, napięcie na oporniku R , a tym samym natężenie prądu płynącego przez ten opornik, są równe zero. Natychmiastowe przełączenie klucza z położenia 1 do położenia 2 oznacza, że w trakcie przełączania natężenie prądu w cewkach praktycznie nie zmienia się. Układ w położeniu 2 przedstawiony jest na rysunku 2. Wielkości początkowe wynoszą:

$$I_1(0) = I_2(0) = I = \mathcal{E}/r; \quad I_3(0) = 0.$$

Z prawa Kirchhoffa dla konturu $abcd$ w dowolnej chwili czasu mamy:

$$L_1 dI_1/dt = 0, \text{ stąd } I_1 = \text{const.}$$

Ponieważ $I_1 = I_2 + I_3$, zachodzi związek:

$$dI_1/dt = dI_2/dt + dI_3/dt, \text{ stąd } dI_2 = -dI_3.$$

Na oporniku R wydzielą się ciepło, co powoduje zanikanie prądu I_2 , a jego zmniejszenie jest równe przyrostowi prądu I_3 . Po ustaleniu się prądów mamy:

$$I_1(\infty) = I_3(\infty) = \mathcal{E}/r, \quad I_2(\infty) = 0.$$

Zgodnie z zasadą zachowania energii, energia pola magnetycznego cewki L_2 wydzielą się w postaci ciepła Q na oporniku R :

$$Q = L_2 I_2^2(0)/2 = L_2 \mathcal{E}^2 / (2r^2).$$

797. Warunek pływania barki, w której nie ma wody, ma postać:

$$(1) \quad mg = \rho g ab(c - h),$$

gdzie m jest masą barki, a ρ gęstością wody. Załóżmy, że barka zanurzyła się tak, że wysokość jej burty nad powierzchnią wody jest równa h_1 , a grubość warstwy wody wewnątrz barki wynosi l (rys. 3). Warunek pływania przyjmuje teraz postać:

$$(2) \quad mg + \rho g abl = \rho g ab(c - h_1).$$

Z równań (1) i (2) otrzymujemy:

$$(3) \quad c - h_1 - l = c - h,$$

co oznacza, że różnica poziomów wody w dowolnej chwili (dopóki barka nie zatoni) jest stała i równa różnicy wysokości barki i wysokości burty nad wodą w nieprzeciekającej barce. Zatem woda dostaje się do barki ze stałą prędkością. Wyznamy ją, korzystając z równania Bernoulliego.

Przyjmujemy, że energia potencjalna na poziomie wody na zewnątrz barki wynosi 0. Dla rurki prądu, która zaczyna się na poziomie wody na zewnątrz barki i kończy na poziomie wody wewnątrz barki nad otworem, możemy napisać:

$$(4) \quad p_0 = p_0 - \rho g(c - h_1 - l) + \rho v^2/2,$$

gdzie p_0 jest ciśnieniem atmosferycznym, v prędkością wody wciekającej do otworu. W równaniu (3) uwzględniliśmy fakt, że powierzchnia wody wewnątrz barki jest dużo większa od powierzchni otworu. Dlatego prędkość podnoszenia się wody w barce jest dużo mniejsza od v i można ją zaniedbać. Z równań (3) i (4) otrzymujemy: $v = \sqrt{2g(c - h)}$.

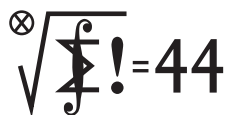
Barka zatoni, gdy krawędź burty zrówna się z powierzchnią wody na zewnątrz, czyli poziom wody nad podłogą osiągnie wartość h , a objętość wody w barce

$$V = abh = Sv\Delta t, \text{ gdzie } S = \pi d^2/4.$$

Szukany czas:

$$\Delta t = 4abh / \left(\pi d^2 \sqrt{2g(c - h)} \right) \approx 3 \text{ miesiące.}$$

Klub 44 M



Czołówka ligi zadaniowej **Klub 44 M**
po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań
893 ($WT = 3,25$) i 894 ($WT = 1,35$)
z numeru 1/2025

Andrzej Kurach	Ryjewo	47,81
Janusz Olszewski	Warszawa	45,27
Krzysztof Zygan	Lubin	44,74
Michał Warmuz	Żywiec	41,39
Marcin Kasperski	Warszawa	40,49
Marek Spychała	Warszawa	39,84
Piotr Wiśniewski	Warszawa	38,24
Grzegorz Wiączkowski		37,93
Andrzej Daniluk	Warszawa	37,89
Krzysztof Kamiński	Pabianice	35,71
Marian Łupieżowiec	Gliwice	35,53
Krzysztof Maziarz	Londyn	34,67
Jerzy Cisło	Wrocław	33,16

I znów: na linii mety – dobrze znane nazwiska: pan Andrzej Kurach po raz czwarty; pan Janusz Olszewski po raz dwudziesty piąty; pan Krzysztof Zygan po raz drugi. Czekamy na kolejne okrążenia!

Redaguje Marcin E. KUCZMA

Rozwiązania zadań z numeru 4/2025

Przypominamy treść zadań:

899. Niech $g: \mathbb{Z}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ będzie dowolną funkcją ($\mathbb{Z}^2$ jest zbiorem punktów kratowych, czyli uporządkowanych par liczb całkowitych). Określamy odległość punktów $P, Q \in \mathbb{Z}^2$, $P = (x, y)$, $Q = (u, v)$ wzorem $d(P, Q) = \max(|x - u|, |y - v|)$. Dowieść, że istnieje nieskończenie wiele pięcioelementowych zbiorów takich punktów kratowych $(P_0, P_1, P_2, P_3, P_4)$, że (dla $i = 1, 2, 3, 4$): $d(P_0, P_i) = 1$, $g(P_0) \leq g(P_i)$.

900. Wielomiany f_1, f_2, f_3, f_4 jednej zmiennej, o współczynnikach rzeczywistych, spełniają warunki:

$$f_1(x) \leq f_2(x) \leq f_3(x) \leq f_4(x) \quad \text{dla } x \in [0, 1],$$

$$f_2(x) \leq f_4(x) \leq f_1(x) \leq f_3(x) \quad \text{dla } x \in [-1, 0].$$

Wykazać, że $f_1 = f_2 = f_3 = f_4$.

899. O punktach P, Q z odległością $d(P, Q) = 1$ będziemy mówili, że sąsiadują. Weźmy dowolny kwadrat złożony z 16 punktów kratowych (po cztery w czterech rzędkach). Odetnijmy punkty narożne. Zostaje układ K złożony z 12 punktów (kolejno w rzędkach: 2, 4, 4, 2). W tym układzie każdy punkt ma co najmniej czterech sąsiadów.

Bierzemy jako P_0 ten punkt zbioru K , w którym funkcja g przyjmuje najmniejszą wartość. Niech P_1, P_2, P_3, P_4 będą punktami zbioru K , sąsiadującymi z P_0 (gdy jest ich więcej, wybieramy cztery dowolne). Piątka P_0, P_1, P_2, P_3, P_4 ma wymaganą własność.

Na płaszczyźnie kratowej możemy umieścić nieskończenie wiele kopii zbioru K i w każdym z nich znaleźć piątkę punktów, o jaką chodzi.

900. Oznaczenia przedziałów: $I = [0, 1]$, $J = [-1, 0]$. Dowód tezy zadania nie wprost. Przypuśćmy, że nie wszystkie cztery wielomiany są identyczne. Z podanych warunków wynika, że wówczas żadne dwa nie są identyczne. Zatem następujące trzy wielomiany są niezerowe:

$$P = f_2 - f_1 \begin{cases} \leq 0 & \text{w } J, \\ \geq 0 & \text{w } I, \end{cases} \quad Q = f_3 - f_1 \begin{cases} \geq 0 & \text{w } J, \\ \geq 0 & \text{w } I, \end{cases} \quad R = f_4 - f_1 \begin{cases} \leq 0 & \text{w } J, \\ \geq 0 & \text{w } I. \end{cases}$$

Jasne, że $P(0) = Q(0) = R(0) = 0$. O lokalnym zachowaniu tych trzech wielomianów w otoczeniu zera decydują ich składniki w najniższej potęgde.

Używając skrótu sws (= składniki wyższych stopni) możemy napisać:

$$P(x) = ax^k + \text{sws}, \quad Q(x) = bx^l + \text{sws}, \quad R(x) = cx^m + \text{sws}$$

(k, l, m to wykładniki owych wiodących składników; a, b, c – współczynniki).

Wielomiany P i R zmieniają znak przy przejściu przez 0 i wobec tego wykładniki k i m są nieparzyste; natomiast Q ma lokalne minimum w punkcie 0, zatem wykładnik l jest parzysty (tak więc $k \neq l \neq m$).

Wielomian $P - Q = f_2 - f_3 \begin{cases} \leq 0 & \text{w } J, \\ \leq 0 & \text{w } I \end{cases}$ ma lokalne maksimum w punkcie 0, co (wobec wiedzy, że $k \neq l$) oznacza, że $\min\{k, l\}$ jest liczbą parzystą. Stąd, na mocy wcześniejszych ustaleń, $k > l$.

Wielomian $Q - R = f_3 - f_4 \begin{cases} \geq 0 & \text{w } J, \\ \leq 0 & \text{w } I \end{cases}$ zmienia znak przy przejściu przez 0, co teraz oznacza, że $\min\{l, m\}$

jest liczbą nieparzystą. Stąd $l > m$ (i w konsekwencji $k > m$).

$$\text{Wreszcie wielomian } R - P = f_4 - f_2 \begin{cases} \geq 0 & \text{w } J, \\ \geq 0 & \text{w } I \end{cases}$$

ma lokalne minimum w punkcie 0, co oznacza, że $\min\{k, m\}$ (czyli po prostu m) jest liczbą parzystą. Ale wcześniej zostało ustalone, że m jest liczbą nieparzystą. Sprzeczność kończy dowód.

Skrót regulaminu

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru n w terminie do końca miesiąca $n + 2$. Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze $n + 4$. Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przysyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**. Można je przysyłać również pocztą elektroniczną pod adresem delta@mimuw.edu.pl (preferujemy pliki pdf). Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez

współczynnik trudności danego zadania: $WT = 4 - 3S/N$, przy czym S oznacza sumę ocen za rozwiązania tego zadania, a N – liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (**M** lub **F**) – i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu 44 punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (**M** lub **F**), zostaje on członkiem **Klubu 44**, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo – to tytuł **Weterana**. Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 2/2002 oraz znajduje się na stronie deltami.edu.pl.