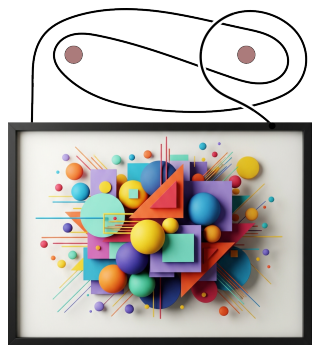


Już dla $n = 4$ długość rozwiązania jest horrendalna:

$$S_4 = x_1 x_2 x_1^{-1} x_2^{-1} x_3 x_2 x_1 x_2^{-1} x_1^{-1} x_3^{-1} x_4 x_3 x_1 x_2 x_1^{-1} x_2^{-1} x_3^{-1} x_2 x_1 x_2^{-1} x_1^{-1} x_4^{-1} x_3^{-1}.$$



Rys. 2. Ilustracja rozwiązania dla $n = 2$

Rozwiązanie to ma jednak jedną zasadniczą wadę – długość rozwiązań rośnie wykładniczo. Jeśli przez d_n oznaczmy długość napisu S_n , to spełniona jest rekurencja $d_n = 2d_{n-1} + 2$, co przy warunku $d_2 = 4$ daje nietrudny do sprawdzenia jawny wzór $d_n = 2^n + 2^{n-1} - 2$.

Sprytny podział gwoździ to połowa... sukcesu. Okazuje się, że możemy dokonać bardzo zgrabnej optymalizacji, osiągając złożoność wielomianową!

Wystarczy, że podejmiemy do sprawy choć odrobinę delikatniej, nie dokładając raz za razem po jednym gwoździu, a dzieląc zbiór gwoździ na coraz mniejsze połowy, które będą komutować ze sobą.

Zdefiniujmy w tym celu:

$$E(i : i) = x_i,$$

$$E(i : i + 1) = [x_i, x_{i+1}]$$

i w ogólności:

$$E(i : j) = \left[E\left(i : \left\lfloor \frac{i+j}{2} \right\rfloor\right), E\left(\left\lfloor \frac{i+j}{2} \right\rfloor + 1 : j\right) \right].$$

Dla przykładu:

$$\begin{aligned} E(1 : 4) &= [E(1 : 2), E(3 : 4)] \\ &= E(1 : 2)E(3 : 4)E(1 : 2)^{-1}E(3 : 4)^{-1} \\ &= (x_1 x_2 x_1^{-1} x_2^{-1})(x_3 x_4 x_3^{-1} x_4^{-1})(x_2 x_1 x_2^{-1} x_1^{-1})(x_4 x_3 x_4^{-1} x_3^{-1}). \end{aligned}$$

Tak zdefiniowane $E(i : j)$ będzie rozwiązaniem dla gwoździ od i do j , pozwalając rozbić problem na mniejsze części. Aby się o tym przekonać, wystarczy przeprowadzić indukcję względem wartości różnicy $j - i$. Usunięcie x_s dla $i \leq s \leq k$, gdzie $k = \lceil \frac{i+j}{2} \rceil$, „anihiluje” nam $E(i : k)$ na mocy założenia indukcyjnego i zostaje $E(k + 1 : j)E(k + 1 : j)^{-1} = \emptyset$. Rozumowanie jest analogiczne, gdy $k + 1 \leq s \leq j$.

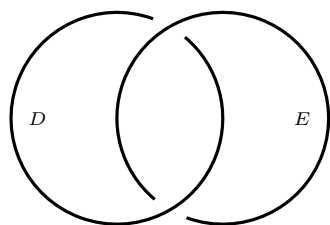
Przyjrzyjmy się długości tak określonego rozwiązania. Dla uproszczenia przyjmijmy, że n jest potęgą dwójki. Jeśli δ_m jest długością $E(1 : n)$, gdzie $n = 2^m$, to spełniona jest zależność $\delta_m = 4\delta_{m-1}$, co przy $\delta_0 = 1$ daje nam po prostu $\delta_m = 4^m = n^2$. Dla wartości n niebędących potęgami dwójki pozostaje prawdą, że długość napisu jest rzędu n^2 .

Zagadka o wieszaniu obrazków jest świetnym przykładem na to, jak dobrze dobrany zapis matematyczny pozwala uprościć pozornie złożony problem kombinatoryczny do bardziej podstawowych, a przede wszystkim – czytelnych! zagadnień. Nada się ona również na efektowny pokaz matematyczny, jeżeli tylko zamiast na gwoździach, przeprowadzimy doświadczenie na wyciągniętych ramionach ochotników!

Tekst powstał na podstawie artykułu *Picture-Hanging Puzzles*, Erika Demaine’a, Martina Demaine’a, Yaira Minskiego, Josepha Mitchella, Ronalda Rivesta i Mihaia Patrascu.

Pierścienie Boromeuszy a wieszanie obrazków

*Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Uniwersytet Warszawski



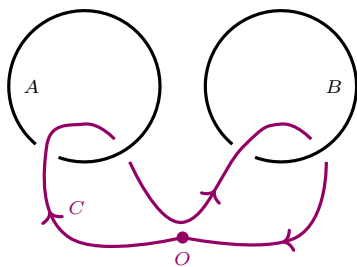
Rys. 1. Przykład nietrywialnego splotu pętli D i E (splot Hopfa)

*Michał MIŚKIEWICZ**

Polecam następującą zagadkę: skonstruować trzy pętle („pierścienie”) A , B , C w taki sposób, by:

- tworzyły one nietrywialny splot, a więc np. by pętli C nie dało się wyjąć na zewnątrz;
- każda para tworzyła trywialny splot, czyli np. po usunięciu C pozostałe pętle A , B dało się rozdzielić.

Dla ilustracji podaję obok przykład nietrywialnego splotu dwóch pętli (rys. 1). Nietrywialność można rozpoznać po tym, że idąc wzdłuż D , raz przechodzimy nad E , a raz pod. Rozwiązanie tej zagadki (jak i następnych) można znaleźć



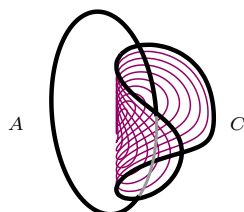
Rys. 2. Trywialny spłot A i B jako początek rozwiązania zagadki. Kolorem zaznaczona jest pętla C odpowiadająca przykładowemu napisowi ab

na stronie 18, tymczasem wskazówka: zacząć od umieszczenia pętli A i B jak na rysunku 2 (mogą nawet na siebie nachodzić, byle nie były splątane), po czym poprowadzić pętlę C w taki sposób, by kolejne „przecięcia” z pętlą A się znosiły, czyli np. układały w ciąg nad-nad-pod-pod lub nad-pod-pod-nad; podobnie z pętlą B – w ten sposób unikniemy splotu par A, C i B, C . Pozostaje przeprowadzić to w taki sposób, by cała trójka była splątana.

Najprostsze rozwiązanie tej zagadki bierze swoją nazwę od włoskiego rodu Boromeuszy, który umieścił je w swoim herbie. Według niektórych źródeł spłot ten symbolizował więzy łączące trzy rodziny arystokratyczne – Boromeuszy, Sforzów i Viscontich – a według innych odnosił się do Trójcy Świętej. Był też chętnie stosowany wcześniej przez ludy germańskie (w swojej trójkątnej formie znanej jako *valknut*), jak i poza Europą. Jaki jednak ma to związek z wieszaniem obrazków rozważanym przez Marię Pieczarkę w obecnym numerze?

Otóż jest to po prostu ta sama zagadka! W zobaczeniu tego pomoże opis formalny, nieco odmienny od języka przejść *nad* i *pod*. Ustalmy jakiś punkt zaczepienia O i prowadźmy pętlę C etapami: w jednym kroku wychodzimy z O , przechodzimy przez jedną z pętli A lub B i wracamy do O . Zanotujmy przy tym kolejne kroki: niech a odpowiada przejściu przez A z góry na dół, a^{-1} podobnie, tylko z dołu do góry, a b oraz b^{-1} analogicznie dla B . Przeanalizujemy następnie otrzymany napis. Dla przykładu: ab odpowiada zwyczajnemu łańcuchowi złożonemu z trzech ogniw (rys. 2), który spełnia prawie wszystkie warunki zagadki – niestety usunięcie A pozostawia B i C nadal splątane. Odnotujmy, że przyporządkowanie napisowi odpowiadającej mu pętli jest wzajemnie jednoznaczne, jeśli umówimy się, że napisy można „skracać”, np. utożsamiając $aaa^{-1}b$ z ab (polecam zastanowić się, dlaczego to są dwa sposoby opisu tej samej pętli), przy czym zamiana kolejności symboli jest niedozwolona. Ta obserwacja nie jest łatwa w dowodzie, ale chyba odpowiada intuicji.

Po przeczytaniu artykułu o wieszaniu obrazka nie powinno dziwić, że właściwym rozwiązaniem okazuje się... pętla C opisana poprzez $aba^{-1}b^{-1}$. Rzeczywiście, usunięcie pętli B powoduje, że symbole b i b^{-1} można pominąć, pozostawiając aa^{-1} , a to skraca się do pustego napisu, czyli pętli trywialnej (niepołączonej z A); podobnie jest przy usunięciu A . Warto pamiętać, że nie jest to jedyne rozwiązanie. W artykule Jacka Gładysza z Δ_{18}^1 pojawia się inny naturalny spłot, spopularyzowany przez Martina Gardnera, i okazuje się, że istotnie różni się on od splotu Boromeuszy. Jakiemu napisowi odpowiada? Pozostawiam Czytelnika z tym pytaniem.



Rys. 3. Na pętli C rozpięto „dysk” rozłączny z A . Umożliwia to stopniową deformację pętli C poprzez ściąganie jej do punktu, co zaznaczono kolorowymi liniami

Proponuję jeszcze trzy zagadki związane ze splotem Boromeuszy. W ramach wstępu do pierwszej z nich zauważmy, że na pętli C nie da się rozpiąć dysku, który byłby rozłączny z A i B – inaczej C dałoby się ściągnąć do punktu bez zahaczenia o pozostałe pętle (rys. 3). Ale da się rozpiąć co innego:

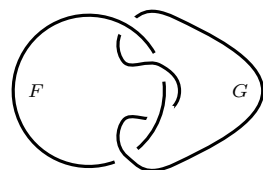
Zagadka 2. W splocie Boromeuszy znaleźć powierzchnię rozpiętą na pętli C , czyli mającą C jako swój brzeg, a jednocześnie rozłączną z pętlami A i B .

Warto zwrócić uwagę, że na rysunku 1 podobne zadanie byłoby niemożliwe – na pętli D nie da się rozpiąć *żadnej* powierzchni rozłącznej z E . Okazuje się tu kluczowe, że napis $aba^{-1}b^{-1}$ skraca się, jeśli dopuścimy zamianę symboli miejscami (bo $aa^{-1}bb^{-1}$ sprowadza się do pustego napisu). Pełne wyjaśnienie tego fenomenu można odnaleźć w twierdzeniu Hurewicza, na którego omówienie niestety brakuje tu miejsca.

Zagadka 3. Znaleźć powierzchnię rozpiętą na F i rozłączną z G (rys. 4). Czy jest ona dwustronna czy jednostronna? (inaczej: orientowalna czy nie?)

Zagadka 4. Znaleźć powierzchnię rozpiętą na splocie Boromeuszy, czyli taką, której brzeg składa się z trzech okręgów A, B, C .

Podobnie dla każdego innego splotu (lub węzła) da się znaleźć rozpiętą nań powierzchnię orientowalną (nawet więcej niż jedną), nazywaną powierzchnią Seiferta – pożytki z istnienia takiej powierzchni to również temat na inną opowieść.



Rys. 4. Pętla G jest dwukrotnie nawinięta na okrąg F , a mimo to na F da się rozpiąć powierzchnię rozłączną z G