

Wielomiany w kombinatoryce

Joanna JASZUŃSKA*

* Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Uniwersytet Warszawski

W całym tekście n, j, k są nieujemnymi liczbami całkowitymi.

Symbol Newtona $\binom{n}{j}$ oznacza liczbę sposobów wybrania podzbioru j elementów spośród n różnych. Jest to równoważne wskazaniu $n - j$ elementów niewybranych, więc $\binom{n}{j} = \binom{n}{n-j}$.

Przyjmujemy, że $\binom{0}{0} = 1$.

Dla $n = 0$ we wzorze (*) mamy $1 = 1$.



Dodajemy kolumnami, korzystając ze wzoru (*).

Korzystamy ze wzoru na sumę wyrazów ciągu geometrycznego.

W wielu problemach kombinatorycznych pomocne jest badanie odpowiednio dobranych wielomianów, a dokładniej – analizowanie ich współczynników. Przedstawię kilka przykładów o rosnącym stopniu trudności, wprowadzających kolejne przydatne narzędzia i pomysły. Wielokrotnie korzystając będziemy z ważnego wzoru:

$$(*) \quad (1+x)^n = \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} x^j.$$

Wzór ten uzasadnimy, analizując proces wymnażania n nawiasów. Z każdego z nich wybieramy składnik 1 albo x i mnożymy tak wybranych n elementów, a następnie wszystkie uzyskane w ten sposób iloczyny dodajemy. W efekcie uzyskujemy sumę wyrażen postaci $1^{n-j} x^j$ dla $j = 0, 1, 2, \dots, n$, przy czym każde z nich pojawia się dokładnie tyle razy, na ile sposobów da się wybrać j nawiasów spośród n (i z nich wziąć element x), czyli właśnie $\binom{n}{j}$ razy. $\square$

Podstawiając $x = 1$, otrzymujemy znany wzór $2^n = \sum_{j=0}^n \binom{n}{j}$. Każda z jego stron opisuje liczbę podzbiorów zbioru n -elementowego. Po lewej podzbiór utożsamiamy z ciągiem decyzji wziąć/nie wziąć, podjętych wobec każdego z n kolejnych elementów, stąd 2^n możliwości. Po prawej zaś zliczamy podzbiory według mocy, tzn. osobno liczymy podzbiory o $0, 1, 2, \dots, n$ elementach.

Dalsze ciekawe tożsamości można uzyskać, przyjmując $x = -1$, $x = 2$ itd., a także różniczkując wzór (*) i dopiero później podstawiając za x jakieś wartości. My jednak będziemy odtąd badać tylko wielomiany i ich współczynniki, traktując x jako pomocniczy symbol i nie rozważając żadnych konkretnych jego wartości.

Zadanie 1. Dowieść, że $\sum_{j=0}^n \binom{n}{j}^2 = \binom{2n}{n}$ dla dowolnego n .

Rozwiązanie. Ze wzoru (*) dla wykładnika $2n$ mamy $(1+x)^{2n} = \sum_{j=0}^{2n} \binom{2n}{j} x^j$. Współczynnik przy x^n w wielomianie $(1+x)^{2n}$ jest więc równy $\binom{2n}{n}$.

Z drugiej strony, wymnażając czynniki po prawej stronie w iloczynie

$$(1+x)^n \cdot (1+x)^n = \left(\sum_{j=0}^n \binom{n}{j} x^j \right) \cdot \left(\sum_{j=0}^n \binom{n}{j} x^j \right),$$

wyraz x^n otrzymamy jako $x^j \cdot x^{n-j}$ dla każdego $j = 0, \dots, n$, przy czym przy każdym z tych czynników pojawi się odpowiedni współczynnik: $\binom{n}{j} x^j \cdot \binom{n}{n-j} x^{n-j}$. Stąd współczynnik przy x^n w wielomianie $(1+x)^{2n}$ – równy, jak już wiemy, $\binom{2n}{n}$ – jest jednocześnie równy $\sum_{j=0}^n \binom{n}{j} \binom{n}{n-j} = \sum_{j=0}^n \binom{n}{j}^2$. $\square$

Zadanie 2. Dowieść, że $\binom{n}{k} + \dots + \binom{k+1}{k} + \binom{k}{k} = \binom{n+1}{k+1}$ dla takich n, k , że $n \geq k$.

Rozwiązanie. Oznaczmy $a_k = \binom{n}{k} + \dots + \binom{k+1}{k} + \binom{k}{k}$. Rozważmy wielomian

$$\begin{aligned} a_n x^n + \dots + a_2 x^2 + a_1 x^1 + a_0 x^0 &= \\ &= \binom{n}{n} x^n + \\ &\quad \vdots \\ &\quad + \binom{n}{2} x^2 + \dots + \binom{2}{2} x^2 + \\ &\quad + \binom{n}{1} x^1 + \dots + \binom{2}{1} x^1 + \binom{1}{1} x^1 + \\ &\quad + \binom{n}{0} x^0 + \dots + \binom{2}{0} x^0 + \binom{1}{0} x^0 + \binom{0}{0} x^0 = \\ &= (1+x)^n + \dots + (1+x)^2 + (1+x)^1 + (1+x)^0 = \\ &= \frac{(1+x)^{n+1} - 1}{(1+x) - 1} = \frac{(1+x)^{n+1} - 1}{x}. \end{aligned}$$

Uzyskany iloraz jest – wbrew ewentualnym obawom – faktycznie wielomianem zmiennej x : w liczniku po odjęciu 1 zostają wyłącznie składniki o dodatnich potęgach przy x i po podzieleniu przez x z mianownika otrzymujemy wielomian.

Interesujące nas a_k to współczynnik przy x^k w tym wielomianie, czyli współczynnik przy x^{k+1} w $(1+x)^{n+1} - 1$, a więc – ze wzoru (*) – $\binom{n+1}{k+1}$, co kończy dowód. $\square$

Można oczywiście łatwo sporządzić tabelki możliwych wyników, jednak ten prosty przykład posłuży nam do przedstawienia pewnej ogólniejszej metody.

Zadanie 3. W pewnej grze rzuca się jednocześnie dwiema kostkami czworocziennymi, na każdej może wypaść 1, 2, 3 lub 4, wynikiem jest suma otrzymanych liczb. Jakie są możliwe wyniki i jakie ich prawdopodobieństwa? Jak by się zmieniły, gdyby na jednej z kostek były liczby 1, 2, 2, 3, a na drugiej 1, 3, 3, 5?

Rozwiązanie. Rozważmy następujący iloczyn, w którym każdy z czynników odpowiada jednej kostce, a kolejne wykładniki przy x w danym nawiasie równe są liczbom na tej kostce:

$$(x^1 + x^2 + x^3 + x^4) \cdot (x^1 + x^2 + x^3 + x^4) = \\ = \sum_{1 \leq j, k \leq 4} x^j \cdot x^k = \sum_{1 \leq j, k \leq 4} x^{j+k} = \sum_{n=2}^8 a_n x^n.$$

Mnożąc te nawiasy, uzyskujemy 16 składników postaci $x^j \cdot x^k = x^{j+k}$. Niektóre się powtarzają, na przykład x^5 występuje cztery razy, bo $1+4=2+3=3+2=4+1$. Współczynniki a_n to właśnie krotności poszczególnych x^n , zatem $a_5 = 4$. Tak otrzymany wielomian opisuje więc możliwe wyniki (występujące w nim wartości n) oraz ich prawdopodobieństwa (w tym przypadku równe $a_n/16$).

Analogicznie dla kostek z liczbami 1, 2, 2, 3 oraz 1, 3, 3, 5 mamy wielomian

$$(x^1 + x^2 + x^2 + x^3) \cdot (x^1 + x^3 + x^3 + x^5) = \\ = x^2 \cdot (1 + 2x + x^2) \cdot (1 + 2x^2 + x^4) = x^2 \cdot (1+x)^2 \cdot (1+x^2)^2 = \\ = (x \cdot (1+x) \cdot (1+x^2))^2 = (x \cdot (1+x+x^2+x^3))^2 = \\ = (x + x^2 + x^3 + x^4)^2.$$

Czy można napisać takie liczby na kostce ośmiościennej i monecie, by one też równie dobrze nadawały się do tej gry? Warto przy okazji zadania 3 wspomnieć też o tzw. *kościach Sichermana*, czyli dwóch kościach sześciennych różnych od „standardowych”, które dają te same co kości „standardowe” prawdopodobieństwa otrzymania poszczególnych sum oczek. O problemie tym można przeczytać w Δ_{09}^1 .

Jest to dokładnie ten sam wielomian co wcześniej, ma więc takie same współczynniki. Wobec tego nasze nowe kostki dają identyczne sumy z jednakowymi prawdopodobieństwami. $\square$

Zadanie 4. Kupujemy n owoców, przy czym liczba gruszek ma być parzysta, moreli – podzielna przez 5, pomarańczy najwyżej 4, arbuz najwyżej 1 (innych owoców nie rozważamy). Na ile sposobów można spełnić te warunki?

Rozwiązanie. Podobnie jak w poprzednim zadaniu, wymnożmy cztery nawiasy odpowiadające owocom, gdzie wykładniki przy x w każdym nawiasie odpowiadają dopuszczalnym liczbom owoców. Wówczas uzyskamy sumę jednomianów postaci $x^g \cdot x^m \cdot x^p \cdot x^a = x^{g+m+p+a}$, gdzie g odpowiada możliwej liczbie gruszek, m – moreli itd. oraz chcemy, by $g+m+p+a=n$. Wobec tego odpowiedź to współczynnik przy x^n w iloczynie

$$(1 + x^2 + x^4 + \dots) \cdot (1 + x^5 + x^{10} + \dots) \cdot (1 + x^1 + x^2 + x^3 + x^4) \cdot (1 + x) = \\ = \frac{1}{1-x^2} \cdot \frac{1}{1-x^5} \cdot \frac{1-x^5}{1-x} \cdot \frac{1-x^2}{1-x} = \left(\frac{1}{1-x} \right)^2 = \\ = (1 + x + x^2 + \dots)^2.$$

Podnosząc $1 + x + x^2 + \dots$ do kwadratu, składnik x^n dostajemy jako $x^j \cdot x^{n-j}$ dla każdego $j = 0, 1, \dots, n$, więc na $n+1$ sposobów. Taki jest zatem poszukiwany współczynnik przy x^n , czyli szukana liczba sposobów wybrania owoców. $\square$

Zadanie 5. Ile podzbiorów zbioru $\{1, 2, \dots, 3n\}$ ma podzielną przez 3 liczbę elementów?

Rozwiązanie. Niech $q \neq 1$ będzie dowolnym zespolonym pierwiastkiem trzeciego stopnia z 1 (drugim jest wtedy q^2). Wówczas 1, q i q^2 są rozwiązaniami równania $z^3 - 1 = 0$, czyli $(z-1)(1+z+z^2) = 0$. Stąd $q^3 = 1$ oraz $1 + q + q^2 = 0$ (**).

Nieskończone sumy w nawiasach nie są przeszkodą, możemy bowiem przyjąć, że $|x| < 1$, i skorzystać ze wzoru na sumę wyrazów ciągu geometrycznego.

Intuicja podpowiada, że co trzeci, czyli $2^{3n}/3$, ale ta liczba nie jest całkowita, nie jest więc poprawną odpowiedzią.

Korzystając ze wzoru (*), otrzymujemy

$$\begin{aligned}(1+q^0)^{3n} + (1+q^1)^{3n} + (1+q^2)^{3n} &= \\&= \sum_{j=0}^{3n} \binom{3n}{j} q^{0 \cdot j} + \sum_{j=0}^{3n} \binom{3n}{j} q^{1 \cdot j} + \sum_{j=0}^{3n} \binom{3n}{j} q^{2 \cdot j} = \\&= \sum_{j=0}^{3n} \binom{3n}{j} (q^0 + q^j + q^{2j}) = 3 \cdot \sum_{k=0}^n \binom{3n}{3k},\end{aligned}$$

Obserwacja (***):

ze wzorów (**) dla $j = 3k$ mamy

$q^0 + q^j + q^{2j} = 1 + 1 + 1 = 3$,
a dla pozostałych j otrzymujemy
 $q^0 + q^j + q^{2j} = 1 + q + q^2 = 0$.

przy czym ostatnia równość wynika z obserwacji (***) na marginesie.

Zauważmy teraz, że $\sum_{k=0}^n \binom{3n}{3k}$ to dokładnie poszukiwana w zadaniu liczba podzbiorów zbioru $(3n)$ -elementowego o liczbie elementów podzielnej przez 3.

Jednocześnie

$$\begin{aligned}(1+q^0)^{3n} + (1+q^1)^{3n} + (1+q^2)^{3n} &= \\&= 2^{3n} + (-q^2)^{3n} + (-q)^{3n} = 2^{3n} + (-1)^{3n} q^{6n} + (-1)^{3n} q^{3n} = \\&= 2^{3n} + (-1)^n + (-1)^n = 2^{3n} + 2 \cdot (-1)^n.\end{aligned}$$

Korzystamy z własności (**) liczby q .

Początkowa intuicja nie była zła.

$$\text{Stąd ostatecznie mamy wynik: } \sum_{k=0}^n \binom{3n}{3k} = \frac{2^{3n} + 2 \cdot (-1)^n}{3}.$$

□

Intuicja znów podpowiada, że co trzeci, czyli około $2^{3n}/3$ i znów okazuje się dość trafna.

Zadanie 6. Ile podzbiorów zbioru $\{1, 2, \dots, 3n\}$ ma podzielną przez 3 sumę elementów?

Rozwiązanie. Rozważmy wielomian

$$w(z) = (1+z)(1+z^2)(1+z^3) \dots (1+z^{3n}) = \sum_{j=0}^m a_j z^j \text{ dla } m = 1 + 2 + \dots + 3n.$$

Przykładowo, dla $n \geq 2$ mamy
 $z^1 \cdot z^2 \cdot z^3 = z^1 \cdot z^5 = z^2 \cdot z^4 = z^6$
oraz sumę 6 mają cztery podzbiory:
 $\{1, 2, 3\}, \{1, 5\}, \{2, 4\}, \{6\}$, zatem $a_6 = 4$
(podobne rozumowanie pojawiło się
w zadaniach 3 i 4).

Po wymnożeniu nawiasów, każdy składnik z^j pojawia się tyle razy, na ile sposobów można go uzyskać jako iloczyn parami różnych potęg z (bo wybranych z różnych nawiasów), czyli tyle razy, na ile sposobów można uzyskać wykładnik j jako sumę elementów pewnego podzbioru zbioru $\{1, 2, \dots, 3n\}$.

Szukaną odpowiedzią na pytanie z zadania jest zatem wartość wyrażenia

$$a_0 + a_3 + a_6 + \dots$$

Niech q będzie określone tak samo, jak w poprzednim zadaniu. Wówczas

$$\begin{aligned}w(q^0) + w(q^1) + w(q^2) &= a_0(q^0)^0 + a_1(q^0)^1 + a_2(q^0)^2 + \dots + a_m(q^0)^m + \\&\quad + a_0(q^1)^0 + a_1(q^1)^1 + a_2(q^1)^2 + \dots + a_m(q^1)^m + \\&\quad + a_0(q^2)^0 + a_1(q^2)^1 + a_2(q^2)^2 + \dots + a_m(q^2)^m = \\&= \sum_{j=0}^m a_j ((q^0)^j + (q^1)^j + (q^2)^j) = 3 \cdot (a_0 + a_3 + a_6 + \dots),\end{aligned}$$

Dodajemy kolumnami, jak w zadaniu 2.

ostatnia równość znów wynika z obserwacji (***) , na marginesie przy zadaniu 5.

Wyznamy ponownie $w(q^0) + w(q^1) + w(q^2)$ korzystając z definicji wielomianu $w(z)$, liczby q oraz jej własności (**):

$$\begin{aligned}w(q^0) &= w(1) = 2^{3n}, \\w(q^1) &= (1+q)(1+q^2)(1+q^3) \dots (1+q^{3n}) = ((1+q)(1+q^2)(1+q^3))^n = \\&= ((-q^2)(-q)(2))^n = 2^n, \\w(q^2) &= 2^n \text{ (analogicznie)}.\end{aligned}$$

Stąd ostatecznie $w(q^0) + w(q^1) + w(q^2) = 2^{3n} + 2 \cdot 2^n$ i wobec tego mamy wynik:

$$a_0 + a_3 + a_6 + \dots = \frac{2^{3n} + 2 \cdot 2^n}{3}.$$

□

Dodatkowa literatura:

Joanna Jaszńska,

Ścieżki i wielomiany, Δ_{13}^9

Karol Gryszka,

Ułamki Fibonacciego, Δ_{21}^2

Wojciech Guzicki,

Kombinatoryka. Rozszerzony program matematyki w liceum (rozdział 8),
Wydawnictwo Szkolne OMEGA,
Tarnów 2024

Zachęcam do poszukiwania innych rozwiązań powyższych zadań (zapewniam, że istnieją liczne i różnorodne!) oraz innych problemów, które można rozwiązać przy użyciu zaprezentowanych tu metod. Zainteresowanym dalszą lekturą polecam przedstawione na marginesie teksty, a także wyszukiwanie w literaturze terminu *funkcje tworzące*.