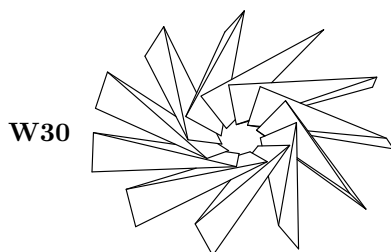
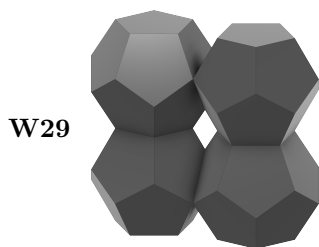
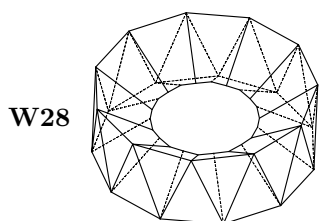
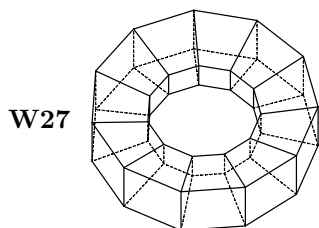
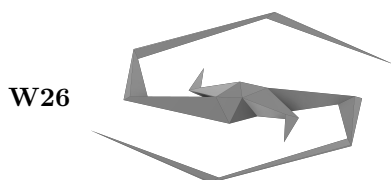
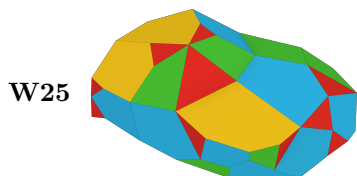


## 44 czterdziestoczterościany na 44-lecie Klubu 44

Janusz FIETT,  
Jędrzej FIETT



Dokładnie 44 lata temu, w 1981 roku, we wrześniowym numerze *Delty* ukazał się regulamin ligi zadaniowej Klub 44 i zostały opublikowane trzy pierwsze zadania. Redagował dr Marcin E. Kuczman... i tak pozostaje do dziś! W obliczu wszechobecnych zmian, które nastąpiły w minionych dekadach, ta stałość to fenomen na światową skalę! W inauguracyjnym numerze Prowadzący pisał: „Główną nagrodą ma być przyjemność płynąca z gimnastyki umysłowej”. Potem zwracał uwagę na to, że liga to zabawa, ale związana z mierzeniem się z „niebanalnymi problemami”. Ten artykuł, wraz z ilustracjami umieszczonymi na marginesach stron rocznicowego numeru *Delty*, jest czytelnicznym podziękowaniem za lata radości z mierzenia się z ligowymi wyzwaniem.

Dlaczego właśnie wielościany? Bo bywają piękne, bo mogą być pretekstem do formułowania niebanalnych problemów, bo ich wymyślanie to gimnastyka umysłowa i znakomita zabawa. Jest więc w nich wszystko to, co wypływa z ducha Klubu 44 M. Wybór wielościanów ma też uzasadnienie osobiste. Autorzy tekstu i ilustracji to prywatnie ojciec i syn: pierwszy jest członkiem Klubu 44 M, a drugi projektantem wzornictwa. Wielościany wielokrotnie przewijały się w naszej rodzinnej edukacji, stawały się czasem rocznicową laurką. Praca nad 44 czterdziestoczterościanami była piękną przygodą, w której żaden z nas nie poradziłby sobie bez drugiego – matematyczne podpowiedzi ułatwiały proces modelowania brył, a ten często weryfikował pierwotne pomysły i wprowadzał nieoczekiwane modyfikacje i smaczki.

Zależało nam, by 44-ściany były rozmaite: nawiązywały do różnych pojęć matematycznych, ale też innych dziedzin obecnych na łamach *Delty*, by były efektowne, a czasem nawet zabawne. Opisy 44-ścianów mają zróżnicowany charakter i nieraz zachęcają Czytelnika do samodzielnych rozważań. 44-ściany prezentujemy na kilka sposobów, kierując się zawsze specyfiką bryły. Wybieraliśmy kąty widzenia, pozwalające jak najlepiej dostrzec istotne cechy konkretnego wielościanu. Polecamy jednak gorąco skorzystanie z galerii dostępnej na stronie [deltami.edu.pl/44sciany](http://deltami.edu.pl/44sciany), umożliwiającej oglądanie wirtualnych modeli 44-ścianów ze wszystkich stron. Zachęcamy do nadsyłania do Redakcji uwag i spostrzeżeń na temat prezentowanych brył, a także przedstawiania własnych propozycji – byłoby wspaniale, gdyby powstała galeria 144, czyli grosza, 44-ścianów!

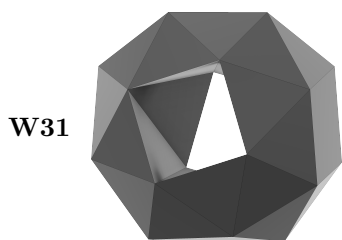
Przejdźmy do opisywania brył. Chcąc, choćby krótko, odnieść się do każdego z 44 wielościanów, musimy używać uproszczeń i skrótów, stawiając raczej na sugestywność niż formalizm. Np. antygraniastosłupem o podstawie  $k$ -kąta – skrótowo  $\text{antg}(k)$ , nazwiemy też każdy wielościan, który jest z nim izomorficzny, ostrosłupy oznaczmy jako  $\text{ostr}(k)$ , nasze 44-ściany – symbolami W1, W2, ..., W44, a bryły platońskie, stanowiące punkt wyjścia wielu konstrukcji – jako F4, F6, F8, F12 i F20. Mało znany, lecz zgrabny i użyteczny, dwuklinoid przycięty (ang. *snub disphenoid*), o 12 trójkątnych ścianach, standardowo oznaczmy przez J84 (jest to jedna z tzw. brył Johnsona).

Na początek dość proste konstrukcje, tworzone przez [sklejanie innych wielościanów](#). W1 powstaje, gdy dwa F20 złączymy ścianami i przekreślimy względem siebie o  $60^\circ$ . Wszystkie jego ściany są trójkątami równobocznymi, choć różnej wielkości. W2 jest czworościanem ściętym, na którego ścianach postawiono graniastosłupy. Krawędzie tej bryły są równej długości, więc jej ściany to wielokąty foremne. W3 to ostrosłupowa wersja sferostożka ( $\Delta_{15}^1$ ). Turlany, tak samo jak sferostożek, zatacza się i dodatkowo turkocze. Ma wszystkie ściany będące identycznymi trójkątami równoramiennymi. W4 to  $\text{antg}(7)$  z F4 doklejonym do każdej bocznej ściany. W5 to cztery J84 przyklejone „na sztorc” do ścian F4. Można to zrobić na wiele sposobów (ile?), ale prezentowana wersja wydaje się najzgrabniejsza. W6 jest  $\text{antg}(11)$  z dwoma doklejonymi do podstaw  $\text{ostr}(11)$ . Podobnie jak w przypadku W3, wszystkie jego ściany są identycznymi trójkątami równoramiennymi. Czytelnikowi Wytrwałemu polecamy znalezienie stosunku boków tych trójkątów, dzięki któremu W6 ma

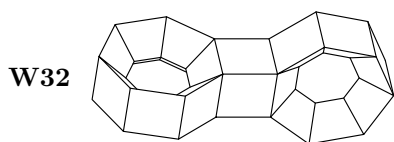
Zainteresowanym twierdzeniem Steinhausa polecamy następujące artykuły:

Stanisław Świerczkowski (1960), *On chains of regular tetrahedra*, Colloquium Mathematicum,

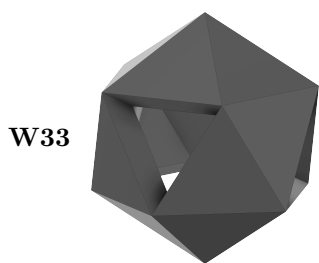
Michael Elgersma, Stan Wagon (2016), *The quadrahelix: a nearly perfect loop of tetrahedra*, preprint w serwisie arXiv.



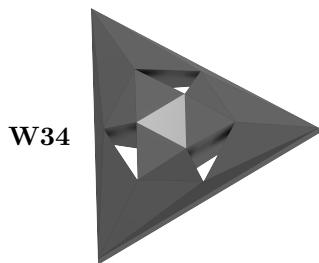
W31



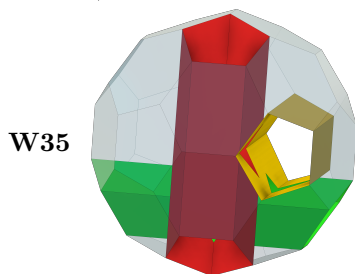
W32



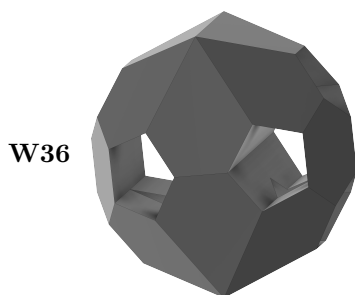
W33



W34



W35



W36

sferę opisaną. W7 to cztery sklezione ośmiościany ścięte, znane ze zdolności wypełnienia przestrzeni. Każdy angażuje w kontakty z sąsiadami trzy spośród 14 ścian, więc pozostałych 11 zostaje wolnych. W8 jest fragmentem obiektu zwanego *tetrahelix*, mającego jako jednostkę F4. Ze względu na krawędzie układające się w potrójną helisę przypomina strukturę kolagenu. Warto przy okazji wspomnieć twierdzenie Hugona Steinhausa, udowodnione przez Stanisława Świerczkowskiego, mówiące o niemożności uformowania łańcucha F4 w zamkniętą pętlę. Wreszcie W9, od którego zaczęła się cała nasza przygoda z 44-ścianami. Ostatecznie wyszło na jaw, że jest matematycznym oszustem! Miał powstać ze sklejenia czterech J84 i dwóch F4. Bardzo chcieliśmy, by jego 44 ściany były trójkątami równobocznymi, co czyniłoby go, *nomen omen*, deltoidalnym. Okazało się, że warunkiem domknięcia tej bryły jest skrócenie, o niespełna 3%, dwóch krawędzi prostopadłych do jej długiej osi. Na wieść o tym, że nie są jednak foremne, czworościany aż poszarzały ze wstydu...

W10 to kombinacja czterech przenikających się ostr(11), których wysokości leżą na wysokościach pewnego F4. Wygląda groźnie, bo przypomina kolce do zatrzymywania pojazdów. W11 to ekspresyjna kompozycja przenikających się, parami podobnych, ostrosłupów – ilustruje jeden ze sposobów pomnażania liczby ścian.

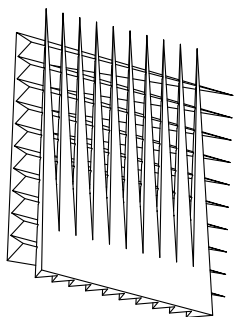
**Wielościanny chodzące parami.** W12 to kanoniczny antg(21)... nudny nieco. Co się jednak stanie, gdy, w wersji krawędziowej, rozsunimy podstawy i mocno obrócimy je względem siebie? Powstały W13 jest tak nieoczywisty, że pokazujemy też dwa jego przekroje, dowodzące m. in. braku wypukłości bryły. Jej boczne krawędzie dzielą się na dwie grupy, ze względu na kąt, pod jakim przebijają płaszczyzny podstaw. Każda grupa to odcinki tworzących innej hiperboloidy jednopowłokowej. Te dwie powierzchnie mają wspólną oś, różnią się obwodem „talii” i przecinają się wzdłuż okręgów opisanych na podstawach W13. Wielościanny W14 i W15 są wariantami jednego pomysłu. Pierwszy realizuje wyjściowy zamysł autora-ojca, podczas gdy drugi powstał w wyniku nieprecyzyjnego opisu tego zamysłu, twórczo zinterpretowanego przez autora-syna. Czytelnik Skrupulatny doliczy się, że w obu wersjach najdalszy (niewidoczny) wierzchołek dużego sześcianu musi być ścięty, by powstała 44. ściana. W16 i W17 przedstawiamy wyjątkowo w formie siatek, a nie gotowych wielościannów. W pewnym sensie obie bryły są dwupiramidami ściętymi, w których dodatkowo ścięto jeszcze po dwa wierzchołki. Pierwszą bryłę Czytelnik z łatwością złoży w wyobraźni. Powinno to pomóc w uzmysłowieniu sobie, na zasadzie analogii, czym jest druga bryła, tym razem... czterowymiarowa. Ułatwieniem może być wejście w perspektywę płaszczaka (patrz  $\Delta_{84}^9$  i  $\Delta_{21}^7$ ) i zastanowienie się, jakie on miałby trudności ze zrozumieniem siatki bryły trójwymiarowej i sposobu jej sklejenia.

**Wielościannowe łamańce.** W18, złożony z 11 odcinków pręta o kwadratowym przekroju, ma kształt trójlistnika, czyli najprostszego nietrywialnego węzła. Konstrukcja W19: weźmy smukły pochyły ostrosłup o podstawie trójkąta równobocznego – taki, żeby rzut jego wysokości na podstawę był prostopadły do jednego z jej boków. Tnijmy ostrosłup równoległymi płaszczyznami, by powstające segmenty, poza ostatnim, były parami podobne. Każdy kolejny segment obróćmy o  $120^\circ$  względem poprzedniego. Wspomniany warunek prostopadłości zapewnia współpłaszczyznowość pewnych ścian kolejnych segmentów, dzięki czemu 44-ścienna heliso-spirala ma więcej skrętów.

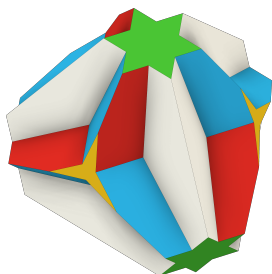
**Motywy ścinania i motyw uzupełniania.** W20 to F4, który został „oszlifowany” przez czterokrotne ścinanie wierzchołków. Dzięki doborowi kątów cięcia trójkątne ściany F4 udało się zmienić w 21-kąty foremne. W21 powstaje z F4, któremu na przemian ujmowane są i dodawane coraz mniejsze jego kopie. W konsekwencji ma wszystkie ściany równoległe do ścian wyjściowego F4. Bryła, niczym Janus, ma różne oblicza, dlatego pokazujemy ją z czterech stron.

**Wielościanny z dedykacją.** W22 to ukłon pierwszego z autorów, biologa i pszczelarza-amatora, w stronę P.T. Felietonistek biologicznych *Delty*. Rozgałęziająca się struktura, inspirowana morfogenezą roślin, wspiera się

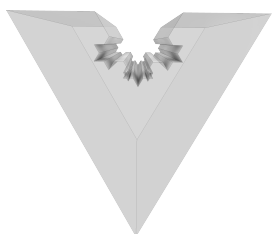
W37



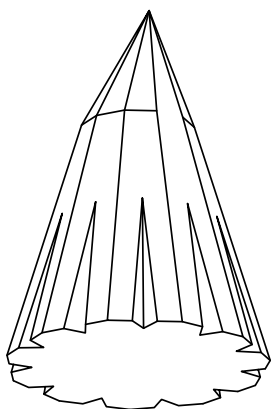
W38



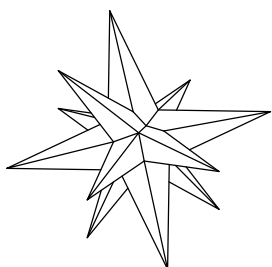
W39



W40



W41



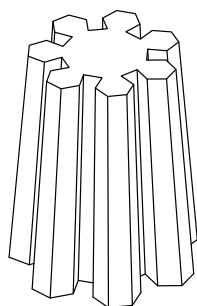
na pniu w kształcie komórki pszczelego plastra. Kto nie zna historii o tym, jak pszczoły, bez użycia rachunku różniczkowego, rozwiązały problem optymalizacyjny, dotyczący oszczędzania wosku, niech koniecznie o tym przeczyta – choćby w klasycznej książce „Śladami Pitagorasa” Szczepana Jeleńskiego. W23 to w zamierzeniu realizacja 44-ścianu losowego – został wycięty z przestrzeni 44 płaszczyznami, stycznymi do sfery w losowo wybranych punktach. Czytelnik zechce przemyśleć, dlaczego jeszcze przed losowaniem można było stwierdzić, że z prawdopodobieństwem równym 1 będzie miał 126 krawędzi i 84 wierzchołki. W24 określiliśmy jako 44-ścian równomierny, a tworząc go, myśleliśmy o fizykach i ich wzajemnych relacjach z matematykami. Punktom wylosowanym na potrzeby konstrukcji wielościanu losowego W23 przypisaliśmy jednakowe ładunki i, w prostej symulacji, pozwoliliśmy im poruszać się po sferze do momentu, gdy siły odpychania się zrównoważą. I znów – płaszczyzny styczne w tych punktach sfery określiły położenie ścian. Efekt był dla nas zaskakujący i zachwycający – w strukturze bryły nie pozostał żaden ślad po wielościanie losowym! Okazał się dalekim, nieznanym krewnym sześciianu, cechującym się takimi samymi jak on symetriami. Jego ściany to 24 pięciokąty oraz 8 i 12 sześciokątów dwóch rodzajów. Uznaliśmy, że jest matematycznie najdoskonalszym z 44-ścianów, jaki udało się nam stworzyć, w związku czym postanowiliśmy go zadedykować Twórcy Ligi.

W25 nazwaliśmy 44-ścianem  $\pi$ , a został stworzony z myślą o informatykach. Zadaliśmy sobie pytanie, czy w 44-ścianie można zakodować rozwinięcie liczby  $\pi$ . Wybór padł nie na system binarny, lecz czwórkowy (dla piszącego te słowa najbardziej naturalny, bo przez pół życia wpatrywał się w ciągi liter A, C, G, T). Czwórka pasuje też do obchodzonej rocznicy. Skonstruowaliśmy więc wielościan, w którym istnieje ścieżka przejścia przez kolejne, sąsiadujące ściany, pozwalająca odczytać początkowe 44 cyfry czwórkowego zapisu liczby  $\pi$  ([oeis.org/A004603](http://oeis.org/A004603)) – wystarczy od liczby boków kolejnych ścian odejmować 3. Strukturę wielościanu opracowaliśmy heurystycznie, lecz przejście od wariantu sferycznego do bryły o płaskich ścianach było karkołomne i nie obeszło się bez pomocy AI. W26 poświęcamy astronomom. Inspiracją były obrazy galaktyk, zwłaszcza spiralnych z poprzeczką. Funkcję tej ostatniej spełnia w 44-ścianie niezastąpiony J84, podczas gdy galaktyczne ramiona zbudowane są z ostrosłupów i ostrosłupów ściętych.

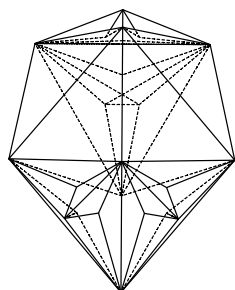
**Wielościany toroidalne.** W27 jest najprostszy – to 11 ściętych ostrosłupów prawidłowych czworokątnych, sklejonych bocznymi ścianami. Efektowniejszy jest W28 – powstaje, gdy  $\text{antg}(11)$  „wydrążymy” z obu stron, używając powierzchni bocznych dwóch ostr(11). Wśród ścian pojawiają się pięciokąty wklęsłe. Niezłym ćwiczeniem wyobraźni może być rozbijanie bryły na jednakowe segmenty. W29 to kombinacja czterech F12. Sklejone ścianami po dwa stworzyły „bałwanki”, które następnie zsunięto tak, by się częściowo przenikały. W30 jest odpowiedzią na pytanie: czy skleając 11 jednakowych czworosćcianów, można otrzymać 44-ścienny torus. Nam udało się to dla czworosćcianów równościennych (o których można przeczytać np. w  $\Delta_{12}^4$  i  $\Delta_{12}^{10}$ ), nie wiemy, czy jest to możliwe dla ostrosłupów prawidłowych trójkątnych. W31 ma brata bliźniaka, z którym po rodzicach, sześćo-ośmiościanach przyciętych, dziedziczy ich szczególną cechę – chiralność. Powstał, gdy jedną z lustrzanych form rodzicielskich przebito tunelem o strukturze  $\text{antg}(4)$ .

**Topologiczne precle.** W32 ma genus (czyli „liczbę otworów/tuneli”) równy 2. Powstaje ze sklejenia, za pośrednictwem F6, dwóch torusów, z których każdy jest zlepkiem siedmiu klinów o kwadratowej podstawie. 20 jednakowych ostrosłupów ściętych o podstawie trójkąta, o odpowiednio dobranych kątach dwuściennych, można skleić ścianami bocznymi tak, by utworzyły F20, mający wewnątrz pustą przestrzeń w kształcie F20. Usunięcie czterech ostrosłupów, leżących w symetrii wierzchołków F4, dało 44-ścian W33, który wydaje się precle o genus 4. Gdy jednak Czytelnik Topologicznie Wprawny wycnicuje go w wyobraźni tak, by ścianki jednego z otworów stały się wąską trójkątną ramką, zauważy, że powstający izomorficzny z nim W34 ma w rzeczywistości

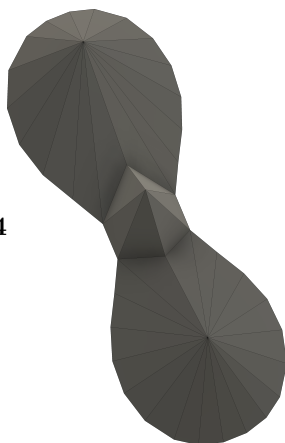
W42



W43



W44



genus 3. W35 jest dwudziestościanem ściętym, przebitym trzema, parami prostopadłymi i przenikającymi się częściowo, pięciokątnymi tunelami, z których każdy daje 6 ścian, w tym dwie współpłaszczyznowe. W36 to F20 przebity dwoma parami równoległych tuneli łączących pięciokąty powstałe po ścięciu ośmiu z jego 12 wierzchołków. Tunele wzajemnie przecinają (lub tylko nacinają) niektóre ze swoich ścian. Wyznaczenie genusu W35 i W36 to zagadka, której rozwiązanie Czytelnik znajdzie na stronie 8. W37 to precel-monstrum o 99 tunelach, złożony z 20 identycznych, przenikających się ostrosłupów. Ma 44 ściany, 720 krawędzi i 480 wierzchołków, co jest zgodne z uogólnionym wzorem Eulera  $W + S = K + 2 - 2T$ . Czy istnieje 44-ścian o większej liczbie otworów?

**44-ścienne fantazje.** W38 to fragment kombinacji F4 i jego obrazów, będących wynikiem obrotów o  $60^\circ$  wokół każdej z wysokości. Ścinając wierzchołki, otrzymujemy gwiazdy. W39, pokazany w formie szklanego bloku widzianego od spodu, jest ściętym F4 z jedną ze ścian wydrążoną w sposób inspirowany płatkami Kocha. W40 jest odpowiedzią na pytanie, czy istnieje 44-ścian z 44-kątną ścianą (oczywiście nie istnieje taki wielościan wypukły). W naszej konstrukcji pojawiają się ściany sąsiadujące wzdłuż dwóch, a nie jednego odcinka. Ktoś może spytać: czy to legalne? Na szczęście, jak wiadomo, nie istnieje jedna obowiązująca definicja wielościanu. Uspakajające jest też to, że W40 spełnia wzór Eulera. W41 powstał z dwunastościanu rombowego, do którego 11 ścian doklejono ostrosłupy, a w dwunastej, dzięki przedłużeniu ścian sąsiadujących ostrosłupów, powstało zagłębienie. Kształtem przypomina nieco jeżowca, którego jednak charakteryzuje symetria pięciopromienna. W42 jest ostrosłupem ściętym o podstawach złożonych z 14-kątów foremnych z siedmioma doklejonymi sześciokątami. Przywołuje na myśl średniowieczną basztę lub wieżę szachową. W43 to J84, na którego 4 peryferyczne ściany nałożono wypukłe trójkątne gwiazdy. Ostatni prezentowany wielościan, W44, jest odpowiedzią na pytanie, czy 44-ścian może mieć 44 przekątne. Jego podstawą jest wielokąt o wierzchołkach leżących na lemniskacie (owalu Cassiniego) o nieprzypadkowo dobranym parametrze  $e = 1,044$ . By uzyskać żadaną liczbę przekątnych, pozbawiliśmy go symetrii. Może ktoś z Czytelników udowodni, że 44-ścian z 44 przekątnymi nie może być wypukły? A może komuś uda się, nie tracąc wypukłości bryły, uzyskać liczbę przekątnych  $P$  taką, że  $|44 - P| < 5$ ? Z tymi pytaniami pozostawiamy Czytelników, mając nadzieję, że podróż przez krainę 44-ścianów dała im równie wiele przyjemności, co nam ich konstruowanie.

## Liczby Kaprekara

Karol GRYSZKA\*

\* Wydział Nauk Ścisłych i Przyrodniczych,  
Uniwersytet Pedagogiczny w Krakowie

D. R. Kaprekar formalnie nie miał  
żadnego wyższego wykształcenia  
matematycznego, mimo to opublikował  
bardzo dużo artykułów naukowych  
i popularnonaukowych.

W 1980 roku indyjski matematyk-amator Dattathreya Ramachandra Kaprekar opisał pewien szczególny typ liczb naturalnych posiadających zaskakującą własność. Przedstawimy ją na przykładzie liczby 297. Rozważmy kwadrat tej liczby i przyjrzyjmy się jego cyfrom:

$$297^2 = 88209, \quad 88 + 209 = 297.$$

Zapis dziesiętny tego kwadratu został podzielony na dwa bloki złożone z dwóch lub trzech cyfr o tej własności, że suma bloków daje wyjściową liczbę. Taka własność i jej odpowiedniki pozwalają na zdefiniowanie liczby Kaprekara, a ściślej liczby  $n$ -Kaprekara. Jest to każda liczba całkowita dodatnia  $N$ , dla której

$$N^2 = Q \cdot 10^n + R, \quad N = Q + R,$$

gdzie  $Q \geq 1$  i  $0 \leq R < 10^n$  są liczbami naturalnymi. Ponadto mówimy, że  $N$  jest liczbą Kaprekara, gdy jest liczbą  $n$ -Kaprekara dla pewnego  $n$ . Poniżej prezentujemy inne liczby Kaprekara.

|                           |                            |         |
|---------------------------|----------------------------|---------|
| $9^2 = 81$                | $8 + 1 = 9$                | $n = 1$ |
| $45^2 = 2025$             | $20 + 25 = 45$             | $n = 2$ |
| $297^2 = 88209$           | $88 + 209 = 297$           | $n = 3$ |
| $4879^2 = 23804641$       | $238 + 4641 = 4879$        | $n = 5$ |
| $538461^2 = 289940248521$ | $289940 + 248521 = 538461$ | $n = 6$ |

Przyjmuje się ponadto, że  $N = 1$  jest  
liczbą  $n$ -Kaprekara dla dowolnego  $n$ .  
Przypadek ten, odpowiadający  $Q = 0$ ,  
 $R = 1$ , nazywa się trywialnym.