

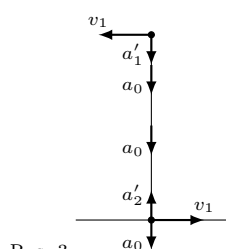
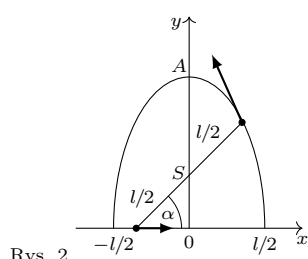
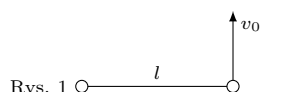
Klub 44 F



Termin nadsyłania rozwiązań: 30 XI 2025

Czołówka ligi zadaniowej **Klub 44 F**
po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań
792 ($WT = 3,23$), 793 ($WT = 2,07$)
z numeru 2/2025

Jacek Konieczny	Poznań	41,11
Jan Zambrzycki	Białystok	4 – 34,42
Andrzej Nowogrodzki		
	Chocianów	3 – 29,48
Paweł Kubit	Kraków	17,21
Paweł Perkowski	Ożarów Maz.	6 – 15,13
Tomasz Wietecha	Tarnów	18 – 13,15
Krzysztof Zygan	Lubin	13,02



Gdy górna kulka wznosi się, jej prędkość maleje. Siła ciężkości odgrywa coraz większą rolę w zakrzywianiu jej toru, co powoduje zmniejszanie siły napięcia nici. Aby znaleźć najmniejsze napięcie, musimy rozważyć sytuację w najwyższym punkcie toru.

Zasada zachowania energii pozwala obliczyć wartość prędkości v_1 w punkcie A, jednakową dla obu kulek:

$$(2) \quad mv_0^2/2 = 2mv_1^2/2 + mgl, \text{ stąd } v_1^2 = v_0^2/2 - gl.$$

Oznaczmy przyspieszenie środka masy układu w chwili, gdy górna kulka znajduje się w punkcie A przez a_0 , przyspieszenia dośrodkowe kulek przez a'_1 i a'_2 (rys. 3), a ich przyspieszenia całkowite przez a_1 i a_2 . Spełnione są równania:

$$a'_1 = a'_2 = v_1^2/(l/2),$$

$$a_2 = a'_2 - a_0 = 0, \text{ stąd } a_0 = 2v_1^2/l,$$

$$a_1 = a'_1 + a_0 = 4v_1^2/l.$$

Minimalne napięcie nici N znajdziemy z równania ruchu górnej kulki oraz równania (2):

$$N + mg = 4mv_1^2/l \implies N = 2mv_0^2/l - 5mg.$$

Nić będzie cały czas napięta podczas ruchu, gdy $N > 0$, stąd $v_0^2 > 5gl/2$.

Dolna kulka nie oderwie się od podłoża, gdy $N < mg$, stąd $v_0^2 < 3gl$.

Górna kulka zakreśli połowę elipsy i uderzy o podłoże. Jeśli zderzenie będzie sprężyste, to zakreśli ten sam tor w przeciwnym kierunku.

Zadania z fizyki nr 802, 803

Redaguje Elżbieta ZAWISTOWSKA

802. Podróżny stał obok początku wagonu z numerem porządkowym k . Pociąg ruszył z miejsca, po czym okazało się, że wagon o numerze m mijają pasażera przez t sekund. Ile czasu przejeżdżał obok tego pasażera wagon o numerze n ? Pociąg poruszał się ruchem jednostajnie przyspieszonym, długości wagonów są jednakowe, odległości między wagonami zaniedbywalne. Podróżny nie poruszał się względem peronu.

803. Dwie metalowe kule o promieniach R znajdują się w bardzo dużej odległości od siebie i połączone są cienkim przewodnikiem, w którego rozcięcie włączona jest cewka o współczynniku samoindukcji L . W chwili początkowej jedna z tych kul naładowana jest ładunkiem Q , druga nienaładowana. Po jakim czasie ładunek kuli naładowanej zmaleje dwukrotnie?

Rozwiązania zadań z numeru 5/2025

Przypominamy treść zadań:

798. Dwie bardzo małe jednakowe kulki związane nieważką, nierozciągliwą nicią leżą na powierzchni poziomej (rys. 1). Jednej z kulek nadano prędkość v_0 skierowaną pionowo w górę. Jaka powinna być wartość tej prędkości, aby druga kulka nie oderwała się od poziomej powierzchni, a nić przez cały czas była naciągnięta? Po jakim torze porusza się wtedy pierwsza kulka? Tarcie kulki o podłoże jest zaniedbywalne.

799. Elektron krąży po orbicie kołowej w jednorodnym polu magnetycznym. Indukcja pola magnetycznego zostaje powoli zwiększona trzy razy, w czasie wielokrotnie przewyższającym okres obrotu. Ile razy zmieni się w tym czasie promień orbity elektronu?

798. Ponieważ nie ma tarcia, a prędkość nadana jednej z kulek jest pionowa, środek masy układu porusza się w kierunku pionowym. Obie kulki uczestniczą w ruchu złożonym – ruch po okręgu o promieniu $l/2$ wokół środka nici nakłada się na ruch tego środka wzdłuż linii pionowej. Wybierzmy układ współrzędnych jak na rysunku 2. Dolna kulka porusza się wzdłuż osi x , jej prędkość w każdej chwili jest równa co do wartości składowej poziomej prędkości górnej kulki i przeciwnie skierowana. Współrzędne x i y górnej kulki możemy wyrazić przez kąt α :

$$(1) \quad x = l \cos \alpha/2, \quad y = l \sin \alpha.$$

Eliminując α z równań (1), otrzymujemy równanie elipsy o półosiach $l/2$ i l :

$$x^2/(l/2)^2 + y^2/l^2 = 1.$$

799. Siła Lorentza nadaje elektronowi przyspieszenie dośrodkowe. Zgodnie z drugą zasadą dynamiki

$$(1) \quad mv^2/R = evB,$$

gdzie m jest masą, a e wartością bezwzględną ładunku elektronu. Zmiana pola magnetycznego powoduje pojawienie się wirowego pola elektrycznego E . Zgodnie z prawem Maxwella natężenie E tego pola dla krótkiego czasu Δt spełnia równanie

$$2\pi RE = \Delta\Phi_B/\Delta t = \pi R^2 \Delta B/\Delta t,$$

stąd

$$(2) \quad E = R\Delta B/(2\Delta t).$$

Siła elektryczna przyspiesza elektron, zmienia się jego prędkość i promień orbity, ale zależność (1) nadal jest spełniona.

Praca siły elektrycznej w krótkim czasie Δt zmienia energię kinetyczną elektronu:

$$eEv\Delta t = \Delta (mv^2/2) \approx mv\Delta v,$$

$$(3) \quad \Delta v \approx eR\Delta B/(2m).$$

Z drugiej strony, z równania (1), mamy:

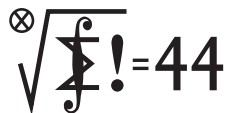
$$(4) \quad \Delta v \approx e(R\Delta B + B\Delta R)/m.$$

Z porównania (3) i (4):

$$\Delta(BR^2) = R^2\Delta B + 2BR\Delta R = R(R\Delta B + 2B\Delta R) = 0.$$

Oznacza to, że przy zmianie pola magnetycznego wielkość BR^2 zachowuje się. Trzykrotny wzrost pola magnetycznego powoduje, że promień orbity maleje $\sqrt{3}$ razy.

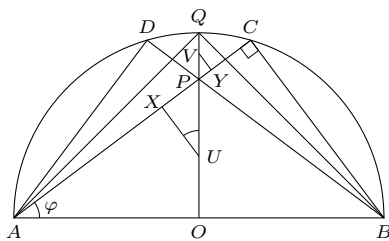
Klub 44 M



Czołówka ligi zadaniowej **Klub 44 M**
po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań
895 ($WT = 1,73$) i 896 ($WT = 1,65$)
z numeru 2/2025

Michał Warmuz	Żywiec	44,77
Marek Spychała	Warszawa	43,22
Marcin Kasperski	Warszawa	42,22
Piotr Wiśniewski	Warszawa	41,62
Grzegorz Wiączkowski		41,31
Andrzej Daniluk	Warszawa	39,54
Krzysztof Maziarz	London	38,05
Krzysztof Kamiński	Pabianice	36,87
Jerzy Cisło	Wrocław	36,37
Marian Łupieżowicz	Gliwice	35,53
Roksana Słowik		31,78

Pan Michał Warmuz: nowa twarz
w Klubie 44 M – pierwsza od przeszło
roku. Witamy!



902. Liczba $w(n)$ to także największy wykładnik, dla którego $n!$ dzieli się przez $5^{w(n)}$ (bo w rozkładzie $n!$ jest więcej dwójek niż piątek); w standardowych symbolach: $w(n) = v_5(n!)$.

Ustalmy $m \in \mathbb{N}$. Określamy rozłączne zbiory $A_0, A_1, \dots, A_m$, zawarte w $\{1, 2, \dots, 5^m\}$:

$$(1) \quad A_j = \{k \cdot 5^j : 1 \leq k \leq 5^{m-j}; \ k \perp 5\} \quad \text{dla } j = 0, 1, \dots, m.$$

Dla $j < m$ liczność zbioru A_j wynosi tyle, ile jest liczb $k \leq 5^{m-1}$ niepodzielnych przez 5; czyli

$$(2) \quad |A_j| = 4 \cdot 5^{m-j-1} \quad \text{dla } j < m.$$

Łączna liczność zbiorów $A_0, \dots, A_{m-1}$ z dołączonym zbiorem jednoelementowym $A_m = \{1 \cdot 5^m\}$ wynosi $4 \sum_{j=0}^{m-1} 5^{m-j-1} + 1 = 5^m$. Ich elementy nie przekraczają 5^m , więc tworzą permutację zbioru $\{1, \dots, 5^m\}$; skąd wniosek, że iloczyn wszystkich tych elementów wynosi $(5^m)!$.

Zapiszmy iloczyn elementów zbioru A_j jako $5^{\alpha_j} P_j$, gdzie $P_j \perp 5$. Wymnażając (po $j = 0, \dots, m$), dostajemy

$$(3) \quad (5^m)! = 5^{\alpha_0 + \dots + \alpha_m} Q, \quad \text{gdzie } Q = P_0 \dots P_{m-1} P_m \perp 5.$$

Zadania z matematyki nr 905, 906

Termin nadsyłania rozwiązań: 30 XI 2025

Redaguje Marcin E. KUCZMA

905. Niech $f(x) = x^3(x^2 + 1)^{-1}$. Wyznaczyć wszystkie możliwe całkowite wartości sumy $f(a) + f(b) + f(c)$ dla dowolnych liczb całkowitych dodatnich a, b, c .

906. W przestrzeni (trójwymiarowej) dana jest parabola P . Niech R będzie zbiorem wszystkich punktów będących wierzchołkami stożków obrotowych, na których leży P [przez *stożek obrotowy* rozumiemy tu powierzchnię powstałą przez obrót prostej wokół przecinającej ją (nie prostopadle) innej prostej (*osi obrotu*)].

Udowodnić, że zbiór R także jest parabolą oraz wyjaśnić, jak są usytuowane jej wierzchołek i ognisko względem wierzchołka i ogniska paraboli P . [*Wierzchołek* paraboli to punkt jej przecięcia z płaszczyzną symetrii; *ognisko* to punkt (w jej płaszczyźnie) określony przez własność: każdy punkt paraboli jest jednakowo odległy od ogniska i od pewnej prostej (zwanej *kierownica*)].

Zadanie 906 zaproponował pan Janusz Fiett z Warszawy.

Rozwiązania zadań z numeru 5/2025

Przypominamy treść zadań:

901. Trapez równoramienny $ABCD$ jest wpisany w okrąg Ω o średnicy AB . Przekątne trapezu, długości d , przecinają się w punkcie P . Okrąg styczny do odcinków PC , PD i do krótkiego łuku CD (okręgu Ω) ma promień r . Okrąg wpisany w trójkąt ABP ma promień $3r$. Obliczyć stosunek r/d .

902. Dla liczby naturalnej n niech $w(n)$ oznacza największy całkowity wykładnik, dla którego $n!$ dzieli się przez $10^{w(n)}$ i niech $f(n) = 10^{-w(n)}n!$. Udowodnić, że dla każdej liczby naturalnej m spełniona jest zależność $f(5^m) \equiv 2^m \pmod{5}$.

901. Niech V i U będą (odpowiednio) środkami okręgów o promieniach r i $3r$, określonych w zadaniu. Nazwijmy punkty styczności: okrąg $(U, 3r)$ styczny do odcinka AB w punkcie O (środku okręgu Ω) i do odcinka AP w punkcie X ; okrąg (V, r) styczny do łuku CD w jego środku Q i do odcinka CP w punkcie Y . Niech $R = OA = OB = OQ$.

Skoro $UX = 3r$, $VY = r$, zatem z podobieństwa $\triangle PXU \sim \triangle PYV$ odczytujemy, że $PU/PV = 3$, i w konsekwencji $PO/PQ = 3$. Stąd $PO = \frac{3}{4}R$ oraz $UP = PO - UO = \frac{3}{4}R - 3r$.

Oznaczając $\varphi = \sphericalangle PAO = \sphericalangle PUX$, mamy $R \operatorname{tg} \varphi = OA \operatorname{tg} \varphi = OP = \frac{3}{4}R$, więc $\operatorname{tg} \varphi = \frac{3}{4}$,
wobec czego $\cos \varphi = \frac{4}{5}$, $\sin \varphi = \frac{3}{5}$. Dalej, $3r = UX = UP \cos \varphi = (\frac{3}{4}R - 3r) \cdot \frac{4}{5}$, skąd $R = 9r$.
I ostatecznie: $d = AC = AB \cos \varphi = 2R \cdot \frac{4}{5} = 18r \cdot \frac{4}{5}$.

Mamy odpowiedź na pytanie z zadania: $r/d = 5/72$.

Oczywiście $\alpha_m = m$, $P_m = 1$; zaś dla $j < m$ mamy, zgodnie z określeniem (1), $\prod_{a \in A_j} a = ((5^j)^{|A_j|})P_j$, więc $\alpha_j = j \cdot |A_j|$.

To liczba podzielna przez 4 (wzór (2)). Ponadto

$$P_j = \prod_{k \leq 5^{m-j}, k \perp 5} k = (1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4) \cdot (6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9) \cdot \dots \cdot (\dots) \quad \text{dla } j < m.$$

W tym ostatnim przedstawieniu mamy $\frac{1}{4}|A_j|$ czynników $()() \dots ()$, a to liczba nieparzysta (wzór (2)). Dlatego $P_j \equiv 4 \pmod{5}$; a stąd, zgodnie z (3), $Q \equiv 4^m \pmod{5}$.

Równość (3) pokazuje, że $w(5^m) = \alpha_0 + \dots + \alpha_m = 4l + m$ dla pewnego l (bo $4|\alpha_j$ dla $j < m$). Zatem

$$\begin{aligned} f(5^m) &= 10^{-w(5^m)}(5^m)! = 10^{-w(5^m)} \cdot 5^{w(5^m)} Q = 2^{-w(5^m)} Q \\ &= 2^{-4l-m} Q. \end{aligned}$$

skąd ostatecznie $f(5^m) \equiv 2^{-4l} \cdot 2^{-m} \cdot 4^m \equiv 2^m \pmod{5}$; to teza zadania.

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru n w terminie do końca miesiąca $n + 2$. Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze $n + 4$. Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej karcie), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przysyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**. Można je przysyłać również pocztą elektroniczną pod adresem delta@mimuw.edu.pl (preferujemy pliki pdf). Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę możemy przez

współczynnik trudności danego zadania: $WT = 4 - 3S/N$, przy czym S oznacza sumę ocen za rozwiązanie tego zadania, a N – liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (**M** lub **F**) – i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu **44** punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (**M** lub **F**), zostaje on członkiem **Klubu 44**, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo – to tytuł **Weterana**. Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 2/2002 oraz znajduje się na stronie deltami.edu.pl.