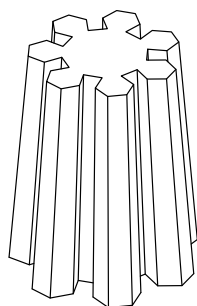
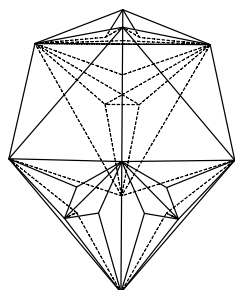


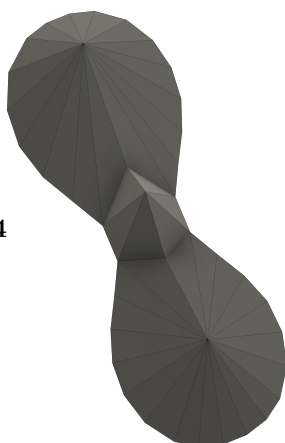
W42



W43



W44



genus 3. W35 jest dwudziestościanem ściętym, przebitym trzema, parami prostopadłymi i przenikającymi się częściowo, pięciokątnymi tunelami, z których każdy daje 6 ścian, w tym dwie współpłaszczyznowe. W36 to F20 przebity dwoma parami równoległych tuneli łączących pięciokąty powstałe po ścięciu ośmiu z jego 12 wierzchołków. Tunele wzajemnie przecinają (lub tylko nacinają) niektóre ze swoich ścian. Wyznaczenie genusu W35 i W36 to zagadka, której rozwiązanie Czytelnik znajdzie na stronie 8. W37 to precel-monstrum o 99 tunelach, złożony z 20 identycznych, przenikających się ostrosłupów. Ma 44 ściany, 720 krawędzi i 480 wierzchołków, co jest zgodne z uogólnionym wzorem Eulera $W + S = K + 2 - 2T$. Czy istnieje 44-ścian o większej liczbie otworów?

44-ścienne fantazje. W38 to fragment kombinacji F4 i jego obrazów, będących wynikiem obrotów o 60° wokół każdej z wysokości. Ścinając wierzchołki, otrzymujemy gwiazdy. W39, pokazany w formie szklanego bloku widzianego od spodu, jest ściętym F4 z jedną ze ścian wydrążoną w sposób inspirowany płatkami Kocha. W40 jest odpowiedzią na pytanie, czy istnieje 44-ścian z 44-kątną ścianą (oczywiście nie istnieje taki wielościan wypukły). W naszej konstrukcji pojawiają się ściany sąsiadujące wzdłuż dwóch, a nie jednego odcinka. Ktoś może spytać: czy to legalne? Na szczęście, jak wiadomo, nie istnieje jedna obowiązująca definicja wielościanu. Uspakajające jest też to, że W40 spełnia wzór Eulera. W41 powstał z dwunastościanu rombowego, do którego 11 ścian doklejono ostrosłupy, a w dwunastej, dzięki przedłużeniu ścian sąsiadujących ostrosłupów, powstało zagłębienie. Kształtem przypomina nieco jeżowca, którego jednak charakteryzuje symetria pięciopromienna. W42 jest ostrosłupem ściętym o podstawach złożonych z 14-kątów foremnych z siedmioma doklejonymi sześciokątami. Przywołuje na myśl średniowieczną basztę lub wieżę szachową. W43 to J84, na którego 4 peryferyczne ściany nałożono wypukłe trójkątne gwiazdy. Ostatni prezentowany wielościan, W44, jest odpowiedzią na pytanie, czy 44-ścian może mieć 44 przekątne. Jego podstawą jest wielokąt o wierzchołkach leżących na lemniskacie (owalu Cassiniego) o nieprzypadkowo dobranym parametrze $e = 1,044$. By uzyskać żadaną liczbę przekątnych, pozbawiliśmy go symetrii. Może ktoś z Czytelników udowodni, że 44-ścian z 44 przekątnymi nie może być wypukły? A może komuś uda się, nie tracąc wypukłości bryły, uzyskać liczbę przekątnych P taką, że $|44 - P| < 5$? Z tymi pytaniami pozostawiamy Czytelników, mając nadzieję, że podróż przez krainę 44-ścianów dała im równie wiele przyjemności, co nam ich konstruowanie.

Liczby Kaprekar

Karol GRYSZKA*

* Wydział Nauk Ścisłych i Przyrodniczych,
Uniwersytet Pedagogiczny w Krakowie

D. R. Kaprekar formalnie nie miał
żadnego wyższego wykształcenia
matematycznego, mimo to opublikował
bardzo dużo artykułów naukowych
i popularnonaukowych.

W 1980 roku indyjski matematyk-amator Dattathreya Ramachandra Kaprekar opisał pewien szczególny typ liczb naturalnych posiadających zaskakującą własność. Przedstawimy ją na przykładzie liczby 297. Rozważmy kwadrat tej liczby i przyjrzyjmy się jego cyfrom:

$$297^2 = 88209, \quad 88 + 209 = 297.$$

Zapis dziesiętny tego kwadratu został podzielony na dwa bloki złożone z dwóch lub trzech cyfr o tej własności, że suma bloków daje wyjściową liczbę. Taka własność i jej odpowiedniki pozwalają na zdefiniowanie liczby Kaprekar, a ściślej liczby n -Kaptekar. Jest to każda liczba całkowita dodatnia N , dla której

$$N^2 = Q \cdot 10^n + R, \quad N = Q + R,$$

gdzie $Q \geq 1$ i $0 \leq R < 10^n$ są liczbami naturalnymi. Ponadto mówimy, że N jest liczbą Kaprekar, gdy jest liczbą n -Kaptekar dla pewnego n . Poniżej prezentujemy inne liczby Kaprekar.

$9^2 = 81$	$8 + 1 = 9$	$n = 1$
$45^2 = 2025$	$20 + 25 = 45$	$n = 2$
$297^2 = 88209$	$88 + 209 = 297$	$n = 3$
$4879^2 = 23804641$	$238 + 4641 = 4879$	$n = 5$
$538461^2 = 289940248521$	$289940 + 248521 = 538461$	$n = 6$

Przyjmuje się ponadto, że $N = 1$ jest
liczbą n -Kaptekar dla dowolnego n .
Przypadek ten, odpowiadający $Q = 0$,
 $R = 1$, nazywa się trywialnym.

Czwarty z podanych wyżej przykładów jednocześnie pokazuje, że może zdarzyć się, że R ma mniej niż n cyfr (pierwsza cyfra bloku to 0, którą w naturalny sposób pomijamy w zapisie).

Trywialnym przykładem liczby n -Kaprekara jest 10^n ; trochę bardziej ciekawym zaś $10^n - 1$. Istotnie,

$$(10^n - 1)^2 = \underbrace{9 \dots 9}_{\times n}^2 = \underbrace{9 \dots 9}_{\times (n-1)} \underbrace{8 \dots 0}_{\times (n-1)} 1,$$

$$\underbrace{9 \dots 9}_{\times (n-1)} 8 + 1 = \underbrace{99 \dots 9}_{\times n}.$$

Opisany powyżej przykład stanowi przyczynek do sformułowania pierwszego wyniku teoretycznego, opisującego jedną z podstawowych własności – licznosci zbioru liczb Kaprekara.

Twierdzenie 1. *Istnieje nieskończenie wiele liczb Kaprekara.*

W dalszej części przyjrzymy się problemowi konstrukcji liczb Kaprekara. Niech $K(M)$ będzie zbiorem wszystkich liczb naturalnych N takich, że

$$(1) \quad N^2 = QM + R,$$

$$(2) \quad N = Q + R,$$

przy czym $0 \leq R < M$. Ponadto będziemy pomijać przypadki trywialne $N = M$, dla których $Q = M$ i $R = 0$, czyli przyjmujemy, że $M \notin K(M)$. Aby nie rozważać bardzo prostych przypadków, zakładamy też, że $M > 2$.

Przypadek $M = 10^n$ opisuje zbiór liczb n -Kaprekara.

Jeśli $M = 1$ lub $M = 2$, to przyjmujemy, że $K(M) = \{1\}$.

Zauważmy prostą własność zdefiniowanych przed chwilą zbiorów $K(M)$.

Twierdzenie 2. *Zbiór $K(M)$ jest niepusty.*

Dowód. Oczywiście, gdyż $1 \in K(M)$. Można ponadto zauważyć, że również $M - 1 \in K(M)$, wystarczy przyjąć $Q = M - 2$ oraz $R = 1$. $\square$

Zauważmy następnie, że warunki (1) i (2) dają $N(N - 1) = Q(M - 1)$, a stąd wnioskujemy $1 \leq N \leq M - 1$. Istotnie, gdyby $N > M$, to $Q > N$, co przeczy (2). Tym samym udowodniliśmy kolejne twierdzenie.

Twierdzenie 3. *Zbiór $K(M)$ jest skończony, co najmniej dwuelementowy i zawarty w zbiorze $\{1, 2, \dots, M - 1\}$.*

W kolejnej części naszych rozważań wprowadzimy pojęcie dzielnika unitarnego. Powiemy, że liczba a jest *dzielnikiem unitarnym* N , jeśli $N = ab$ oraz a i b są liczbami względnie pierwszymi.

Niech a i b będą liczbami względnie pierwszymi. Oznaczmy przez $\text{Inv}(a, b)$ najmniejszą dodatnią liczbę naturalną m taką, że $am \equiv 1 \pmod{b}$.

Mówimy, że dwie liczby całkowite x i y przystają modulo z , jeśli $x - y$ jest podzielne przez z . Fakt ten zapisujemy jako $x \equiv y \pmod{z}$.

Innymi słowy, $m = \text{Inv}(a, b)$ wtedy i tylko wtedy, gdy $1 \leq m < b$ i $am \equiv 1 \pmod{b}$. Funkcja $\text{Inv}(a, b)$ nie jest symetryczna, to jest na ogół $\text{Inv}(a, b) \neq \text{Inv}(b, a)$. Niemniej zachodzi ciekawy związek między dwiema ostatnimi liczbami.

Fakt 1. Jeśli a i b są względnie pierwsze, to $m = \text{Inv}(a, b)$ oraz $n = \text{Inv}(b, a)$ wtedy i tylko wtedy, gdy m i n są dodatnie oraz $am + bn = ab + 1$.

Dowód. Równość $am + bn = ab + 1$ można przekształcić do postaci $am - 1 = b(a - n)$, a więc $am \equiv 1 \pmod{b}$. Gdyby $m \geq b$, to $am + bn \geq ab + bn > ab + 1$, sprzeczność, a więc $m = \text{Inv}(a, b)$. Podobnie dowodzimy, że $n = \text{Inv}(b, a)$.

Założmy teraz, że $m = \text{Inv}(a, b)$ oraz $n = \text{Inv}(b, a)$, a więc $am \equiv 1 \pmod{b}$ oraz $bn \equiv 1 \pmod{a}$. Korzystając z chińskiego twierdzenia o resztach, otrzymujemy teraz, że $am + bn \equiv 1 \pmod{ab}$, czyli $am + bn = 1 + k \cdot ab$ dla pewnej liczby całkowitej k . Wszystkie liczby a, b, m i n są dodatnie, zatem k też jest liczbą dodatnią. Ponieważ $1 \leq m < b$ oraz $1 \leq n < a$,

$$1 + k \cdot ab = am + bn < ab + ba = 2ab.$$

Ponieważ wszystkie rozważane liczby są naturalne, powyższa nierówność może być prawdziwa tylko dla $k = 1$. Ostatecznie więc otrzymaliśmy, że $am + bn = 1 + ab$. Kończy to dowód faktu 1. $\square$

Sformułujemy teraz praktyczne twierdzenie pozwalające wyznaczać liczby Kaprekara.

Twierdzenie 4. Liczba N jest elementem zbioru $K(M)$ wtedy i tylko wtedy, gdy $N = d \cdot \text{Inv}(d, (M - 1)/d)$, gdzie d jest pewnym dzielnikiem unitarnym liczby $M - 1$. Ponadto dla każdego $N \in K(M)$ liczba $M - N$ również jest elementem $K(M)$.

Dowód. ($\Rightarrow$) Wiemy już, że $N(N - 1) = Q(M - 1)$. Ponieważ $\text{NWD}(N, N - 1) = 1$, istnieją względnie pierwsze liczby d i e i takie, że $M - 1 = de$ oraz:

- $d|N$, i tym samym $N = du$ dla pewnego u oraz (na mocy twierdzenia 3) $du = N \leq M - 1 = de$, to jest $u \leq e$,
- $e|(N - 1)$, co daje istnienie v takiego, że $ev + 1 = N$, czyli $du \equiv 1 \pmod{e}$ i w szczególności $u \neq e$.

Stąd $u < e$ i możemy zatem zapisać $u = \text{Inv}(d, e)$.

Ponieważ $e = (M - 1)/d$, liczba N ma żadaną postać.

($\Leftarrow$) Liczba $e = (M - 1)/d$ jest całkowita.

Ponadto z definicji dzielnika unitarnego wynika, że $\text{NWD}(e, d) = 1$. Oznaczmy dalej $u = \text{Inv}(d, e)$.

Z definicji $u < e$ oraz istnieje taka liczba naturalna k , że $du = ke + 1$. Ponieważ $N = du$, więc

$$N^2 = dudu = du(ke + 1) = kued + du$$

$$= ku(M - 1) + du = kuM + (d - k)u.$$

Definiujemy $Q = ku$ oraz $R = (d - k)u$. Wówczas $Q + R = N$ oraz:

- $du = ke + 1 > ku + 1 > ku$, stąd $d > k$ i $R > 0$,
- $(d - k)u < (d - k)e = de - ke = M - 1 - ke < M$, stąd $R < M$.

Widzimy zatem, że N jest elementem zbioru $K(M)$.

Pozostała część twierdzenia wynika z faktu 1:

jeśli bowiem $N \in K(M)$, to $N = d \cdot \text{Inv}(d, (M - 1)/d)$

i oznaczając $e = (M - 1)/d$, $u = \text{Inv}(d, e)$ oraz $u' = \text{Inv}(e, d)$, mamy równość $du + eu' = de + 1 = M$,

czyli $eu' = M - N$ i liczba $M - N$ jest postaci jak w poprzedniej części dowodzonego właśnie twierdzenia. $\square$

Dla zilustrowania twierdzenia 4 wybierzmy $M = 10^n$ i $n = 3$ (a więc szukamy liczb 3-Kaprekara). Wtedy $10^3 - 1 = 27 \cdot 37$ i liczby 27 oraz 37 są względnie pierwsze, zatem są dzielnikami unitarnymi $10^3 - 1$. Sprawdzamy następnie, że

$$\text{Inv}(27, 37) = 11, \quad \text{Inv}(37, 27) = 19.$$

Dlatego na mocy twierdzenia 4 liczby $27 \cdot 11 = 297$ oraz $37 \cdot 19 = 703$ są (jedyne) prócz trywialnych 1 i $10^3 - 1$ liczbami 3-Kaprekara. Ponadto $297 + 703 = 1000$, zgodnie z przewidywaniami drugiej części twierdzenia 4.

Zauważmy, że jeśli w twierdzeniu 4 przyjmujemy $M = b^n$ dla pewnej liczby naturalnej b , otrzymujemy liczby Kaprekara w systemie pozycyjnym o podstawie b . Przypadek $b = 2$ jest ponadto interesujący z następującego powodu.

Twierdzenie 5. Każda parzysta liczba doskonała jest liczbą Kaprekara w dwójkowym systemie pozycyjnym.

Liczba doskonała to liczba naturalna n , której suma dzielników jest równa $2n$. Na przykład 28 jest liczbą doskonałą, gdyż $1 + 2 + 4 + 7 + 14 + 28 = 56 = 2 \cdot 28$.

Dowód. Wiadomo, że każda parzysta liczba doskonała jest postaci $2^{n-1}(2^n - 1)$ dla pewnego n takiego, że $2^n - 1$ jest liczbą pierwszą. Ustalmy $n \geq 1$. Liczby $2^n - 1$ oraz $2^n + 1$ są względnie pierwsze oraz

$$2^{n-1}(2^n - 1) \equiv 1 \pmod{2^n + 1}, \quad 0 < 2^{n-1} < 2^n + 1.$$

Stąd $2^{n-1} = \text{Inv}(2^n - 1, 2^n + 1)$, a więc z twierdzenia 4 liczba $2^{n-1}(2^n - 1)$ jest elementem zbioru $K(2^{2n})$.

Dowód twierdzenia jest więc zakończony.

Zilustrujmy twierdzenie 5 prostym przykładem.

Liczba 28 jest doskonała (zobacz uwagę po twierdzeniu 5) oraz $28 = (11100)_2$. Ponadto (działania rozważamy w systemie dwójkowym)

$$11100^2 = 1100010000, \quad 1100 + 010000 = 11100,$$

czyli $(111000)_2$ jest liczbą 6-Kaprekara.

Ostatnie twierdzenie pozwoli nam na obliczenie, ile dokładnie jest elementów zbioru $K(M)$, ale będziemy potrzebowali jeszcze jednego lematu. Niech $\omega(m)$ oznacza liczbę dzielników pierwszych liczby m .

Lemat 1. Liczba m posiada dokładnie $2^{\omega(m)}$ dzielników unitarnych.

Dowód. Niech $m = p_1^{a_1} \cdot p_2^{a_2} \cdot \dots \cdot p_k^{a_k}$ (a więc $\omega(m) = k$) oraz niech a będzie dzielnikiem unitarnym i niech $m = ab$. Jeśli $p_i | a$, to musi być $p_i^{a_i} | a$, gdyż w przeciwnym wypadku $p_i | b$. Tym samym wybór a polega na wybraniu pewnych dzielników pierwszych m z najwyższymi potęgami. Takich wyborów jest z kolei 2^k . $\square$

Lemat 1 oraz twierdzenie 4 pozwalają już stwierdzić, ile jest liczb w zbiorze $K(M)$.

Twierdzenie 6. Zbiór $K(M)$ posiada dokładnie $2^{\omega(M-1)}$ elementów.

Polecamy Czytelnikowi zweryfikowanie słuszności tego twierdzenia dla analizowanego wcześniej przykładu liczb 3-Kaprekara.



Zadania

×					
	×				
		×			
			×		
				×	
					×

Przygotował Dominik BUREK

M 1828. Dany jest taki wielomian o współczynnikach rzeczywistych, że $P(x) + P(-x)$ ma dokładnie 2025 różnych pierwiastków rzeczywistych. Znajdź wyraz wolny wielomianu P .

M 1829. Liczbę naturalną nazwijmy *dobrą*, jeśli jest postaci $n^2 + 1$ dla pewnej liczby całkowitej n . Udowodnić, że istnieje nieskończenie wiele liczb dobrych k , które nie posiadają dzielnika dobrego, różnego od 1 i k .

M 1830. W tablicy $n \times n$ ($n > 1$) zaznaczono $n + 2$ kwadratów jednostkowych. Czy zawsze możemy tak przestawić wiersze i kolumny, aby wszystkie zaznaczone pola znajdowały się nad główną przekątną lub na niej? (Przyjmujemy, że kwadratowa tabela ma jedną główną przekątną, jak na rysunku).

Przygotował Andrzej MAJHOFER

F 1127. Początkiem astronomicznej wiosny jest dzień równonocy wiosennej, a astronomicznej jesieni – równonocy jesiennej. Są to dni, w których Słońce świeci prostopadle do osi ziemskiej. W tym roku (2025) wiosna rozpoczęła się 20 marca i także 20 marca rozpocznie się w roku przyszłym. Jesień rozpocznie się 22 września. Jak łatwo obliczyć, wiosna i lato potrwają łącznie 186 dni, a jesień i zima będą w sumie o tydzień krótsze i potrwają 179 dni. Skąd bierze się ta różnica?

F 1128. W dniach równonocy wiosennej (20 marca) i jesiennej (22 września), co łatwo sprawdzić w kalendarzu podającym godziny wschodu i zachodu Słońca, dzień trwa kilka minut dłużej niż następująca po nim noc, a rzeczywiste zrównanie czasu trwania dnia i nocy następuje około 3 dni przed dniem równonocy wiosennej i około 3 dni po równonocy jesiennej. Co jest przyczyną tego zjawiska?

Rozwiązania na str. 24