



Słynna anegdota z XIX wieku mówi, że królowa Wiktoria była tak zachwycona powieścią *Alicja w Krainie Czarów*, że po lekturze natychmiast poprosiła o przesłanie jej pozostałych dzieł Lewisa Carrolla. Wkrótce w ręce monarchini trafiła matematyczna pozycja *An Elementary Theory of Determinants* niejakiego Charlesa Dodgsona – gdyż tak brzmi prawdziwe nazwisko autora przygód Alicji. W jednym z dodatków do podręcznika znajduje się opis metody obliczania wyznaczników, znanej obecnie jako *kondensacja Dodgsona*. Oczywiście nas, matematyków, od reakcji królowej dużo bardziej interesuje, na czym polega wspomniana metoda?

‘Why,’ said the Dodo, ‘the best way to explain it is to do it.’ – cytat z *Alicji w Krainie Czarów* w przekładzie Antoniego Marianowicza.

– Hm – rzekł Gołąb z powagą – najlepiej wytłumaczę ci to praktycznie.

Aby wykonać kondensację Dodgsona, wystarczy umieć liczyć wyznaczniki macierzy 2×2 . Oczywiście wyznacznikiem macierzy $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ jest $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$. Rozważmy następującą macierz:

$$M_4 = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 & -4 \\ 5 & 1 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 5 & 3 & -3 \end{bmatrix}.$$

Przyjmijmy, że *wewnątrz* M_4 jest macierz $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, która powstała przez usunięcie pierwszego i ostatniego wiersza oraz pierwszej i ostatniej kolumny.

Następnie dla macierzy M_4 obliczamy wyznaczniki każdej podmacierzy 2×2 złożonej z elementów *sąsiednich* wierszy i kolumn i tworzymy z nich macierz M_3 (3×3), układając je w kolejności indukowanej przez macierz M_4 . Mamy zatem

$$M_3 = \begin{bmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & -4 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -3 \end{vmatrix} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -14 & 5 & 12 \\ 4 & -1 & -2 \\ 4 & -2 & -6 \end{bmatrix}.$$

Podobnie jak wyżej, określamy wnętrza macierzy M_3 , czyli macierz $W_1 = \begin{bmatrix} -1 \end{bmatrix}$.

Na podstawie macierzy M_3 tworzymy analogicznie macierz M_2 , ale tym razem oprócz obliczania wyznaczników wykonujemy również dzielenie ich przez odpowiadające im elementy macierzy W_2 :

$$M_2 = \begin{bmatrix} \begin{vmatrix} -14 & 5 \\ 4 & -1 \end{vmatrix} / 1 & \begin{vmatrix} 5 & 12 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} / 2 \\ \begin{vmatrix} 4 & -1 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} / 1 & \begin{vmatrix} -1 & -2 \\ -2 & -6 \end{vmatrix} / 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6 & 1 \\ -4 & 2 \end{bmatrix}.$$

W ostatnim kroku obliczamy macierz M_1 , która składa się wyłącznie z wyznacznika macierzy M_2 podzielonego przez jedyny element macierzy W_1 :

$$M_1 = \left[\begin{vmatrix} -6 & 1 \\ -4 & 2 \end{vmatrix} / (-1) \right] = [8].$$

Liczba 8 (jedyny element macierzy M_1) jest szukanym wyznacznikiem macierzy M_4 .

Jak można wywnioskować z przedstawionego przykładu, pojedynczy krok kondensacji Dodgsona polega na otrzymywaniu macierzy o jeden wymiar mniejszej poprzez obliczenie odpowiednich wyznaczników 2×2 i dzieleniu ich przez odpowiednie elementy wnętrza mającego ten sam wymiar (o ile takie wnętrza zostało wyznaczone, czyli dzielenia zaczynamy wykonywać

dopiero w drugim kroku). Kiedy już otrzymamy macierz 1×1 , jej jedyny wyraz to wyznacznik wyjściowej macierzy.

Metoda jest zatem relatywnie prosta – sprowadza się do redukcji wymiaru macierzy poprzez obliczanie wyznaczników 2×2 . Dlaczego zatem nie jest ona powszechnie omawiana na podstawowym kursie algebry liniowej? Czytelnik Wnikliwy na pewno dostrzegł już jej *fatalną wadę*, którą jest wielokrotne *dzielenie*. Za każdym razem dzielnik (element odpowiedniej macierzy) musi być różny od 0. Wynika stąd, że nie dla każdej macierzy da się wykonać kondensację Dodgsona (przykładowo macierz 3×3 podlega kondensacji tylko wtedy, gdy jej środkowy element jest niezerowy).

Czytelnikowi Ambitnemu polecamy sprawdzenie, że koszt obliczeniowy metody Dodgsona to $O(n^3)$ (n jest wymiarem macierzy), jak również to, że jeśli wystartujemy od macierzy o wyrazach całkowitych, to wszystkie uzyskiwane po drodze macierze również będą miały (pomimo występującego dzielenia) wyrazy całkowite.

Wedle relacji samego Dodgsona urocza anegdota o królowej Wiktorii nie jest prawdziwa. Pisarz-matematyk, żyjący w epoce Marka Twaina, najwyraźniej zignorował przestrożę kolegi po literackim fachu: *Never let the truth get in the way of a good story*.