

Dla zilustrowania twierdzenia 4 wybierzmy $M = 10^n$ i $n = 3$ (a więc szukamy liczb 3-Kaprekara). Wtedy $10^3 - 1 = 27 \cdot 37$ i liczby 27 oraz 37 są względnie pierwsze, zatem są dzielnikami unitarnymi $10^3 - 1$. Sprawdzamy następnie, że

$$\text{Inv}(27, 37) = 11, \quad \text{Inv}(37, 27) = 19.$$

Dlatego na mocy twierdzenia 4 liczby $27 \cdot 11 = 297$ oraz $37 \cdot 19 = 703$ są (jedyne) prócz trywialnych 1 i $10^3 - 1$ liczbami 3-Kaprekara. Ponadto $297 + 703 = 1000$, zgodnie z przewidywaniami drugiej części twierdzenia 4.

Zauważmy, że jeśli w twierdzeniu 4 przyjmujemy $M = b^n$ dla pewnej liczby naturalnej b , otrzymujemy liczby Kaprekara w systemie pozycyjnym o podstawie b . Przypadek $b = 2$ jest ponadto interesujący z następującego powodu.

Twierdzenie 5. Każda parzysta liczba doskonała jest liczbą Kaprekara w dwójkowym systemie pozycyjnym.

Liczba doskonała to liczba naturalna n , której suma dzielników jest równa $2n$. Na przykład 28 jest liczbą doskonałą, gdyż $1 + 2 + 4 + 7 + 14 + 28 = 56 = 2 \cdot 28$.

Dowód. Wiadomo, że każda parzysta liczba doskonała jest postaci $2^{n-1}(2^n - 1)$ dla pewnego n takiego, że $2^n - 1$ jest liczbą pierwszą. Ustalmy $n \geq 1$. Liczby $2^n - 1$ oraz $2^n + 1$ są względnie pierwsze oraz

$$2^{n-1}(2^n - 1) \equiv 1 \pmod{2^n + 1}, \quad 0 < 2^{n-1} < 2^n + 1.$$

Stąd $2^{n-1} = \text{Inv}(2^n - 1, 2^n + 1)$, a więc z twierdzenia 4 liczba $2^{n-1}(2^n - 1)$ jest elementem zbioru $K(2^{2n})$.

Dowód twierdzenia jest więc zakończony.

Zilustrujmy twierdzenie 5 prostym przykładem.

Liczba 28 jest doskonała (zobacz uwagę po twierdzeniu 5) oraz $28 = (11100)_2$. Ponadto (działania rozważamy w systemie dwójkowym)

$$11100^2 = 1100010000, \quad 1100 + 010000 = 11100,$$

czyli $(111000)_2$ jest liczbą 6-Kaprekara.

Ostatnie twierdzenie pozwoli nam na obliczenie, ile dokładnie jest elementów zbioru $K(M)$, ale będziemy potrzebowali jeszcze jednego lematu. Niech $\omega(m)$ oznacza liczbę dzielników pierwszych liczby m .

Lemat 1. Liczba m posiada dokładnie $2^{\omega(m)}$ dzielników unitarnych.

Dowód. Niech $m = p_1^{a_1} \cdot p_2^{a_2} \cdot \dots \cdot p_k^{a_k}$ (a więc $\omega(m) = k$) oraz niech a będzie dzielnikiem unitarnym i niech $m = ab$. Jeśli $p_i | a$, to musi być $p_i^{a_i} | a$, gdyż w przeciwnym wypadku $p_i | b$. Tym samym wybór a polega na wybraniu pewnych dzielników pierwszych m z najwyższymi potęgami. Takich wyborów jest z kolei 2^k . $\square$

Lemat 1 oraz twierdzenie 4 pozwalają już stwierdzić, ile jest liczb w zbiorze $K(M)$.

Twierdzenie 6. Zbiór $K(M)$ posiada dokładnie $2^{\omega(M-1)}$ elementów.

Polecamy Czytelnikowi zweryfikowanie słuszności tego twierdzenia dla analizowanego wcześniej przykładu liczb 3-Kaprekara.



Zadania

Przygotował Dominik BUREK

M 1828. Dany jest taki wielomian o współczynnikach rzeczywistych, że $P(x) + P(-x)$ ma dokładnie 2025 różnych pierwiastków rzeczywistych. Znajdź wyraz wolny wielomianu P .

M 1829. Liczbę naturalną nazwijmy *dobrą*, jeśli jest postaci $n^2 + 1$ dla pewnej liczby całkowitej n . Udowodnić, że istnieje nieskończenie wiele liczb dobrych k , które nie posiadają dzielnika dobrego, różnego od 1 i k .

M 1830. W tablicy $n \times n$ ($n > 1$) zaznaczono $n + 2$ kwadratów jednostkowych. Czy zawsze możemy tak przestawić wiersze i kolumny, aby wszystkie zaznaczone pola znajdowały się nad główną przekątną lub na niej? (Przyjmujemy, że kwadratowa tabela ma jedną główną przekątną, jak na rysunku).

Przygotował Andrzej MAJHOFER

F 1127. Początkiem astronomicznej wiosny jest dzień równonocy wiosennej, a astronomicznej jesieni – równonocy jesiennej. Są to dni, w których Słońce świeci prostopadle do osi ziemskiej. W tym roku (2025) wiosna rozpoczęła się 20 marca i także 20 marca rozpocznie się w roku przyszłym. Jesień rozpocznie się 22 września. Jak łatwo obliczyć, wiosna i lato potrwają łącznie 186 dni, a jesień i zima będą w sumie o tydzień krótsze i potrwają 179 dni. Skąd bierze się ta różnica?

F 1128. W dniach równonocy wiosennej (20 marca) i jesiennej (22 września), co łatwo sprawdzić w kalendarzu podającym godziny wschodu i zachodu Słońca, dzień trwa kilka minut dłużej niż następująca po nim noc, a rzeczywiste zrównanie czasu trwania dnia i nocy następuje około 3 dni przed dniem równonocy wiosennej i około 3 dni po równonocy jesiennej. Co jest przyczyną tego zjawiska?

×					
	×				
		×			
			×		
				×	
					×

Rozwiązania na str. 24



Rozwiązanie zadania M 1828.

Odpowiedź: Wielomian $P(x) + P(-x)$ jest wielomianem parzystym, wobec tego ma parzystą liczbę różnych niezerowych pierwiastków rzeczywistych. Ponieważ 2025 jest liczbą nieparzystą, jeden z jego pierwiastków musi być równy 0, a to oznacza, że $0 = P(0) + P(-0) = 2P(0)$. Stąd $P(0) = 0$, czyli wyraz wolny P jest równy 0.



Rozwiązanie zadania M 1829.

Niech X będzie zbiorem liczb spełniających warunki zadania, natomiast Y zbiorem liczb dobrych, które posiadają co najmniej jeden dzielnik dobry (różny od 1 i samej liczby).

Założmy, że X jest zbiorem skończonym i niech $X = \{x_1, x_2, \dots, x_k\}$, gdzie $x_1 < x_2 < \dots < x_k$. Zauważmy, że dowolna liczba ze zbioru Y posiada dzielnik ze zbioru X (jest nim np. najmniejszy dobry dzielnik liczby Y).

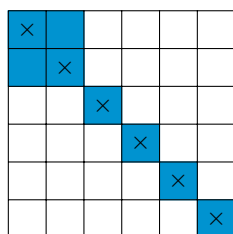
Rozpatrzmy liczbę $A = (x_1 x_2 \dots x_k)^2 + 1$. Ponieważ A jest liczbą dobrą większą niż x_k , więc $A \in Y$. Wobec tego A posiada dzielnik w zbiorze X , co jest niemożliwe, gdyż $x_i \mid A - 1$ dla każdego $i \in \{1, 2, \dots, k\}$.



Rozwiązanie zadania M 1830.

Odpowiedź: Nie.

Zaznaczmy 4 pola kwadratu 2×2 w lewym górnym rogu tablicy i zaznaczmy wszystkie pozostałe kwadraty na głównej przekątnej, jak na rysunku niżej.



Pokażemy indukcyjnie, że nie możemy dokonać żądanego przestawienia wierszy i kolumn.

Dla $n = 2$ jest to oczywiste (wszystkie pola kwadratu są zaznaczone). Załóżmy, że istnieje pożądane przegrupowanie wierszy i kolumn dla $n > 2$. Wybierzmy rząd zawierający

tylko jeden zaznaczony kwadrat s . Wówczas kolumna zawierająca s nie zawiera innych zaznaczonych kwadratów. Jeżeli s nie znajduje się na głównej przekątnej, czyli znajduje się na prawo od niej, to kolumnę zawierającą s można przesunąć w lewo tak, aby s znalazł się na głównej przekątnej; wszystkie pozostałe kolumny albo pozostają na swoich miejscach, albo przesuwają się w prawo, więc warunek nie jest naruszony. Gdy s znajduje się już na głównej przekątnej, można go usunąć i zastosować założenie indukcyjne.

Pytanie: Co, jeśli zaznaczymy $n + 1$ kwadratów?



Rozwiązanie zadania F 1127.

Orbita Ziemi jest elipsą ze Słońcem w jednym z jej ognisk (I prawo Keplera). Zimą Ziemia porusza się bliżej Słońca niż latem. W tym roku największe zbliżenie Ziemi do Słońca nastąpiło 4 stycznia o godzinie 14:28 (w roku 2026 nastąpi to 3 stycznia o 18:16), a najdalej od Słońca Ziemia znalazła się 3 lipca o 21:55 (w roku 2026 nastąpi to 6 lipca o 19:31). Podczas ruchu Ziemi jej moment pędu pozostaje stały (II prawo Keplera), a więc mniejsza odległość od Słońca oznacza większą prędkość ruchu orbitalnego i tym samym krótszy czas ruchu od równonocy jesiennej do wiosennej niż od równonocy wiosennej do jesiennej. Podana w treści zadania różnica czasu pozwala oszacować wartość mimośrodru orbity.

Pełną ilościową analizę zagadnienia zawiera tekst: *Jak wygląda orbita Ziemi?*, Δ_{84}^5 .



Rozwiązanie zadania F 1128.

Słońce oświetla zawsze więcej niż połowę powierzchni Ziemi. Wynika to z jego bardzo dużych rozmiarów. Dodatkowo refrakcja atmosferyczna (tj. fakt, że promienie słoneczne ulegają załamaniu podczas przechodzenia przez coraz gęstsze warstwy atmosfery, nim dotrą do powierzchni Ziemi) „zagina” promienie w kierunku powierzchni Ziemi, zwiększając jej oświetlany obszar. W wyniku obu tych zjawisk cień Ziemi ma kształt stożka o kącie między wysokością (osią stożka) i jego tworzącą wynoszącym $\alpha \approx 50'$.

Pełniejszą analizę można znaleźć w tekście: *Kiedy zaczyna się jesień?*, Δ_{85}^8 .

Studencka Konferencja Naukowa

w ramach obchodów dni prof. Antoniego Hoborskiego

elements X

24- 26 Października 2025

STATYSTYKA | RACHUNEK PRAWDOPODOBIENSTWA | MACHINE LEARNING | ANALIZA DANYCH

Z nami odnajdziesz swój matematyczny element!

www.elements.agh.edu.pl