

wykazały, że odległe o kilkaset kilometrów od siebie populacje muszek z rodzaju *Drosophila* są podobne genetycznie. W latach 80. XX wieku zespół J. A. Coyne przeprowadził eksperyment, w ramach którego z grupy około 60 tysięcy muszek wypuszczonych o godzinie 18:00 na środku pustyni Mojave dwie grupy po 17 sztuk dotarły o godzinie 9 rano do pułapek z bananową pulpą w dwóch oazach oddalonych o 6 km i 15 km od miejsca uwolnienia owadów. Stawia to muszkę w randze ultramaratończyków, pokonały bowiem odległość będącą około 6 milionów razy większą niż długość ich ciała.

O szybkości systemu analizy i reakcji muszki owocowej świadczy też, będąca poza ludzką wyobraźnią i percepcją, umiejętność ucieczki przed packą na muchy. Muszka jest w stanie zobaczyć zbliżający się obiekt i, przewidując jego ruch, zrobić unik: przyjmuje odpowiednie ułożenie nóg i ciała, lekko „przykuca”, wyskakuje w górę i odlatuje w odwrotnym kierunku

niż zbliżająca się packa. Jeżeli owad widzi ją od frontu, przesuwa środkową parę nóg do przodu i wybija się w tył. Jeśli packa zbliża się z tyłu – reakcja jest odwrotna. Jeśli zaś obiekt zbliża się z boku, *Drosophila* ustawia równo nogi, ale wychyla na bok ciało. Całość trwa 200 milisekund i ... pudło!

Myślę o tym, obserwując chmurkę muszek spłoszonych z ciut zleżalej brzoskwini na moim stole. I, zamiast złapać za packę, macham ręką, bo w mojej ludzkiej głowie nie mieści się, że te muszki ze 140 tysiącami neuronów w mózgu mają nieziemskie możliwości.

Odnosiłki literaturowe:

J. A. Coyne i wsp. *Long-Distance Migration of Drosophila*. The American Naturalist 119 (4), 1982

K. J. Leitch i wsp. *The long-distance flight behavior of Drosophila supports an agent-based model for wind-assisted dispersal in insects*. PNAS, 118 (17), 2021

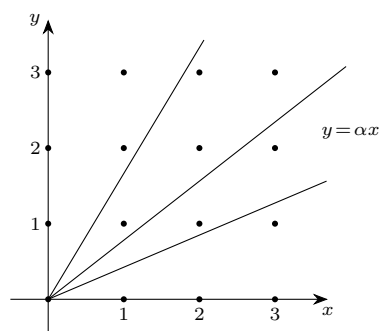
G. Card, M. H. Dickinson. *Visually Mediated Motor Planning in the Escape Response of Drosophila*. Current Biology, 18 (17), 2008

Marta FIKUS-KRYŃSKA

Geometria liczb, algorytmy Herona i Euklidesa oraz ułamki łańcuchowe

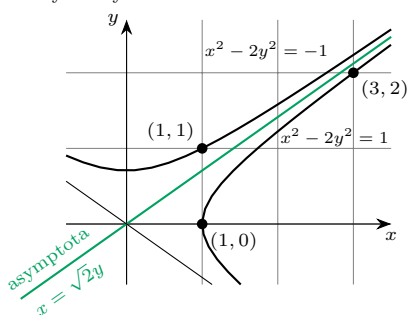
Grzegorz ŁUKASZEWICZ*

*Instytut Matematyki Stosowanej i Mechaniki, Uniwersytet Warszawski



Rys. 1. Proste $y = \alpha x$ dla różnych liczb niewymiernych $\alpha > 0$ i punkty kratowe. Jedynym punktem kratowym leżącym na tych prostych jest początek układu współrzędnych

Czytelnikowi Docieklivemu proponujemy zbadanie, które z własności (W1)–(W4) sformułowanych w dalszej części artykułu mają swoje uogólnienia na różne od $\sqrt{2}$ liczby niewymierne.



Rys. 2. Hiperbole $x^2 - 2y^2 = \pm 1$, ich asymptoty i punkty kratowe (1, 1), (3, 2) na nich leżące (punktu (1, 0) nie bierzemy pod uwagę)

Równanie (1) jest znane jako równanie Pella. Więcej o nim można przeczytać w artykule M. Skałby w Δ_{21}^{12} .

Celem tego artykułu jest przedstawienie, w języku geometrycznej teorii liczb, zagadnienia aproksymacji liczb niewymiernych liczbami wymiernymi, przy użyciu konstrukcji należących do świata starożytnego. Inspiracją dla autora było następujące twierdzenie (podane za [Olds, 2000]).

Twierdzenie 1.1. Każda prosta $y = ax + b$, gdzie a jest liczbą niewymierną, b zaś jest dowolną liczbą rzeczywistą, ma po obu stronach nieskończenie wiele punktów kratowych leżących bliżej niej niż dowolna przypisana odległość $\varepsilon > 0$, bez względu na to, jak małą wartość wybrano dla ε .

Pokażemy **konstruktywny dowód** tego twierdzenia dla $a = 1/\sqrt{2}$, $b = 0$, przypadku związanego z aproksymacją wymierną liczby $\sqrt{2}$. Będzie nas zatem interesowała prosta $x = \sqrt{2}y$ i liczba $\sqrt{2}$, którą wybraliśmy z powodu jej ważnego miejsca w historii matematyki, w świetle kryzysu, który wywołała niegdyś w szkole pitagorejskiej. Wybór konkretnej liczby niewymiernej pozwala też na zobaczenie aproksymacji liczbowych i na dalsze eksperymenty numeryczne. Interesują nas liczby, a nie tylko symbole.

Jest oczywiste, że na prostej $x = \sqrt{2}y$ leży tylko jeden punkt kratowy, którym jest (0, 0).

Pokażemy algorytm dający przybliżenia liczby $\sqrt{2}$ dowolnie blisko z obu stron, jak chce twierdzenie 1.1, i w pewnym sensie najlepszy, a powiązany blisko z jednej strony z **algorytmem Herona** aproksymacji wymiernej liczby $\sqrt{2}$, a z drugiej z **algorytmem Euklidesa** dowodzącym niewymierność tej liczby.

Zauważmy, że np. kolejne ucięcia rozwinięcia dziesiętnego:

$$1, 1,4, 1,41, 1,414, 1,4142, \dots$$

liczby $\sqrt{2}$ zbiegają do niej z dołu oraz bardzo wolno, a metoda Herona daje bardzo szybkie, znakomite przybliżenia, ale niestety tylko z góry, co wkrótce pokażemy.

Wracamy do twierdzenia 1.1 i zapowiadanego konstruktywnego dowodu. Pomysł jest następujący. Rozważmy dwie hiperbole:

$$(1) \quad x^2 - 2y^2 = -1 \quad \text{ i } \quad x^2 - 2y^2 = 1,$$

które będziemy nazywać odpowiednio górną i dolną. Ich asymptotą jest prosta $x = \sqrt{2}y$ (rys. 2). Jeśli na każdej z hiperbol wskażemy nieskończenie wiele punktów kratowych, to punkty te będą spełniać wymagania twierdzenia 1.1.

Wskazówki do zadań ze strony 3

1. Warto zacząć rozwiązanie od znalezienia przykładu na płaszczyźnie rzutowej (pomijając wymóg braku równoległości z treści zadania).
2. Między punktami z zadania narysuj 9 odcinków tej samej długości. Czy rysunek nie przypomina pewnej bryły? Jakiego punktu na nim brakuje?
3. Zaczniemy od znalezienia takiej konfiguracji okręgów rozmieszczonych na sferze. Jakiego przekształcenia można użyć, by przenieść ten układ na płaszczyznę?



Zacznijmy od wykazania następującej własności.

(W1) *Jeśli punkt kratowy (p, q) leży na górnej lub dolnej hiperboli, to punkt kratowy $(p^2 + 2q^2, 2pq)$ leży na dolnej hiperboli.*

Dowód. Ponieważ $(p^2 - 2q^2)^2 = 1$, więc ze wzoru skróconego mnożenia

$$(p^2 + 2q^2)^2 - 1 = (p^2 + 2q^2)^2 - (p^2 - 2q^2)^2 = 2p^2 \cdot 4q^2 = 2(2pq)^2,$$

a zatem $(p^2 + 2q^2)^2 - 2(2pq)^2 = 1$, co należało wykazać.

Motywacją dla powyższej konstrukcji jest następujący pomysł. Jeśli $w = \frac{p}{q}$ jest przybliżeniem liczby $\sqrt{2}$, to $2/w$ również, tylko z drugiej strony. Spodziewamy się, że średnia arytmetyczna $\bar{w}$ tych dwóch liczb jest jeszcze lepszym przybliżeniem. Tymczasem:

$$\bar{w} = \frac{1}{2} \left(w + \frac{2}{w} \right) = \frac{p^2 + 2q^2}{2pq}.$$

Punkt $(p_1, q_1) = (1, 1)$ na górnej hiperboli odpowiada liczbie wymiernej $\frac{p}{q} = 1$, czyli części całkowitej liczby $\sqrt{2}$, a dalsze otrzymane w opisany sposób punkty kratowe leżą na dolnej hiperboli i odpowiadają aproksymacji liczby $\sqrt{2}$ metodą Herona [Krzyżanowski, 2021]. Pierwszymi wyrazami tego ciągu na dolnej hiperboli są liczby

$$(2) \quad \frac{3}{2}, \frac{17}{12}, \frac{577}{408}, \frac{665857}{470832}, \dots$$

Narzucają się następujące pytania: jak szybko ciąg ten zbiega do swojej granicy?, czy na dolnej hiperboli nie ma innych punktów kratowych? oraz czy nie ma analogicznego algorytmu dającego nieskończony ciąg punktów kratowych na hiperboli górnej?

Na pierwsze pytanie odpowiada następujące oszacowanie.

(W2) *Jeśli punkt kratowy (p, q) leży na hiperboli $x^2 - 2y^2 = 1$, to $\frac{p}{q} > \sqrt{2}$ oraz*

$$(3) \quad \left| \frac{p}{q} - \sqrt{2} \right| < \frac{1}{2q^2}.$$

Dowód. Mamy $p^2 - 2q^2 = (p - \sqrt{2}q)(p + \sqrt{2}q) = 1$, zatem $p > \sqrt{2}q$. Ponieważ także $1 < \sqrt{2}$, więc

$$0 < \frac{p}{q} - \sqrt{2} = \frac{1}{q(p + \sqrt{2}q)} < \frac{\sqrt{2}}{q(2\sqrt{2}q)} = \frac{1}{2q^2}. \quad (\text{Q.E.D.})$$

Na drugie pytanie odpowiedź jest prosta. Łatwo sprawdzić, że na dolnej hiperboli leży także punkt $(99, 70)$. Dalej pokażemy, że takich punktów jest nieskończenie wiele.

Odpowiedź na trzecie pytanie jest twierdząca. Mamy:

(W3) *Na górnej hiperboli leży nieskończenie wiele punktów kratowych (p, q) .*

Dowód. Rozważmy ciąg (p_n, q_n) określony rekurencyjnie:

$$(4) \quad p_{n+1} = p_n + 2q_n, \quad q_{n+1} = p_n + q_n.$$

Proste rachunki prowadzą do równości $p_{n+1}^2 - 2q_{n+1}^2 = -(p_n^2 - 2q_n^2)$. Ponieważ punkt $(p_1, q_1) = (1, 1)$ leży na górnej hiperboli, więc punkty o numerach nieparzystych 3, 5, 7, ... także leżą na tej hiperboli. (Q.E.D.)

Tym samym twierdzenie 1.1 dla prostej $x = \sqrt{2}y$ zostało udowodnione.

Podsumowując: wykazaliśmy, że startując z punktu $(p_1, q_1) = (1, 1)$, otrzymaliśmy taki nieskończony ciąg

(p_n, q_n) punktów kratowych, że punkty o numerach nieparzystych leżą na hiperboli górnej, punkty o numerach parzystych leżą na hiperboli dolnej.

Jest oczywiste, że ma miejsce nierówność

$$(5) \quad \frac{p_{2k+1}}{q_{2k+1}} < \sqrt{2} < \frac{p_{2k}}{q_{2k}}$$

oraz że ułamki odpowiadające kolejnym punktom na hiperboli górnej tworzą ciąg ściśle rosnący, zbieżny do $\sqrt{2}$, natomiast ułamki odpowiadające kolejnym punktom na hiperboli dolnej tworzą ciąg ściśle malejący, także zbieżny do $\sqrt{2}$. Kolejne wyrazy ciągu przekształcają z jednej hiperboli na drugą. Złożenie dwóch iteracji prowadzi do odwzorowania:

$$(p_n, q_n) \mapsto (3p_n + 4q_n, 2p_n + 3q_n) = (p_{n+2}, q_{n+2}),$$

które zastosowane do punktów początkowych $(1, 1)$ i $(3, 2)$ określa wszystkie kolejne punkty kratowe, odpowiednio, na górnej i dolnej hiperboli. Dowód tego faktu można znaleźć np. w książce [Sierpiński, 1965].

Powracając do oszacowania (3) dla aproksymacji wymiernej liczby $\sqrt{2}$ metodą Herona, można spytać, czy liczbę 2 w mianowniku po prawej stronie nierówności można zastąpić większą, aby uzyskać lepsze oszacowanie. Nie chcąc tu, z braku miejsca, wchodzić w subtelności teorii liczb, pokażemy tylko, że liczby 2 nie można zastąpić liczbą 3.

(W4) *Jeśli $1 < \frac{p}{q} < \frac{3}{2}$, to $\left| \sqrt{2} - \frac{p}{q} \right| \geq \frac{1}{3q^2}$.*

Dowód. Mamy $|2q^2 - p^2| \geq 1$ i $\sqrt{2} + \frac{p}{q} \leq 3$, stąd

$$\left| \sqrt{2} - \frac{p}{q} \right| = \frac{|2q^2 - p^2|}{q^2(\sqrt{2} + \frac{p}{q})} \geq \frac{1}{3q^2}. \quad (\text{Q.E.D.})$$

Z zależności (4) wynika, że $q_{k+1}p_k - p_{k+1}q_k = p_k^2 - 2q_k^2 = (-1)^k$, a stąd $\left| \frac{p_k}{q_k} - \frac{p_{k+1}}{q_{k+1}} \right| \leq \frac{1}{q_k q_{k+1}}$. Z tej nierówności i nierówności (5) otrzymujemy bez trudu oszacowanie

$$\left| \sqrt{2} - \frac{p_k}{q_k} \right| < \frac{1}{q_k q_{k+1}},$$

dla każdej liczby kratowej (p_k, q_k) na dolnej i górnej hiperboli.

Początkowymi wyrazami ciągu określonego rekurencyjnie w (4) z $(p_1, q_1) = (1, 1)$ są

$$(6) \quad \frac{1}{1}, \frac{3}{2}, \frac{7}{5}, \frac{17}{12}, \frac{41}{29}, \frac{99}{70}, \frac{239}{169}, \frac{577}{408}, \frac{1393}{985}, \frac{3363}{2378}, \dots, \frac{665857}{470832}, \dots$$

Porównując ten ciąg z ciągiem (2), widzimy, że ten drugi jest dużo szybciej zbieżny i że gęstość wyrazów ciągu (2) w ciągu (6) dąży do zera, gdy $p_n, q_n \rightarrow \infty$.

Porównajmy szybkość zbieżności aproksymacji dziesiętnych liczby $\sqrt{2}$ za pomocą ciągu $(1, 1, 4, 1, 41, 1, 414, 1, 4142, \dots)$ z szybkością aproksymacji metodą Herona. k -cyfrowa aproksymacja dziesiętna jest oddalona od liczby $\sqrt{2}$ o mniej niż $\frac{1}{10^{k-1}}$. Natomiast dla aproksymacji Herona mamy:

$$\left| \sqrt{2} - \frac{p_n}{q_n} \right| < \frac{1}{2 \cdot 10^{2k-2}},$$

gdzie k jest liczbą cyfr liczby q_n . Wynika to natychmiast z oszacowania (3) oraz nierówności $10^{k-1} \leq q_n$ (porównaj [Apostol, 2002]).

Rekurencja (4) odegrała fundamentalną rolę w historii matematyki poprzez swoje miejsce w geometrycznym dowodzie niewspółmierności boku kwadratu z jego przekątną. Mianowicie, jeśli skierujemy rekurencję w przeciwną stronę (rys. 3), tzn.

$$(7) \quad x_{n+1} = 2y_n - x_n, \quad y_{n+1} = x_n - y_n,$$

rozpoczynając od $x_1 = \sqrt{2}$, $y_1 = 1$, liczb reprezentujących długość przekątnej i boku kwadratu, odpowiednio, to otrzymamy ciągi malejące do zera, przy czym stosunek x_n/y_n jest taki sam dla wszystkich n , równy $\sqrt{2}$. W oryginalnym dowodzie geometrycznym opartym na **algorytmie Euklidesa** mówi się o długościach przekątnej i boku kwadratu, ich stosunku i podobieństwie konstruowanych kolejno trójkątów (rys. 4).

Geometryczny dowód niewspółmierności przekątnej CB i boku CA kwadratu jest następujący.

Gdyby istniała wspólna miara L , to mielibyśmy $CB = pL$, $CA = bL$ dla pewnych liczb naturalnych p i b . Stąd:

$$B'A = B'A' = CA' = (p - b)L, \quad CB' = CA - B'A = (2b - p)L$$

i podobnie CB'' oraz CA'' i wszystkie następne długości przekątnych i boków w konstrukcji miałyby wspólną miarę L . Ale tak nie może być, bowiem długości tych przekątnych i boków dążą do zera, zatem od pewnego momentu są mniejsze od L . Otrzymaliśmy sprzeczność, co dowodzi niewspółmierności przekątnej CB i boku CA rozważanego kwadratu (patrz [Euklides], Ks. X. Tw. 2).

Z rysunku 4 odczytujemy następujące relacje: $CB = CA' + CA$ oraz $CA = CB' + CA'$, skąd $CB = CB' + 2CA'$. Druga i trzecia relacja definiują rekurencje (4) i (7). Mamy też: $\frac{CB}{CA} = \frac{CB'}{CA'}$, skąd

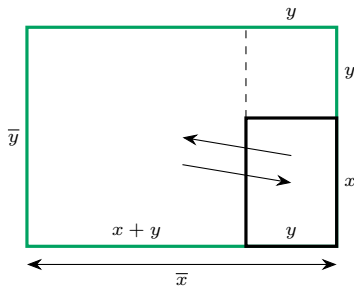
$$\frac{CB}{CA} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{CB}{CA}}.$$

Z powyższej równości wnioskujemy, z jednej strony, że $\frac{CB}{CA} = \sqrt{2}$, a z drugiej, że liczba $\sqrt{2}$ ma następujące rozwinięcie w nieskończony **ułamek łańcuchowy**: $\sqrt{2} = [1; 2, 2, 2, 2, 2, 2, \dots]$, to znaczy

$$\sqrt{2} = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \dots}},$$

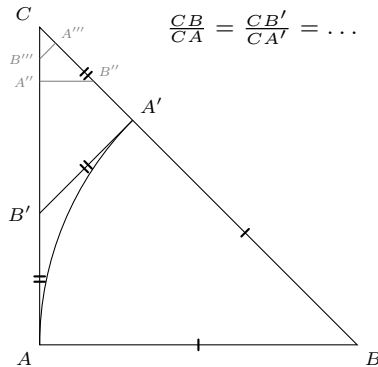
którego reduktę $[1; 2] = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$, $[1; 2, 2] = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2}} = \frac{7}{5}$, $[1; 2, 2, 2] = \frac{17}{12}$, ... są kolejnymi wyrazami ciągu (6).

Algorytm produkujący kolejne reduktę liczby $\sqrt{2}$ (dający przybliżenia liczby $\sqrt{2}$ dowolnie blisko z obu stron, jak chce twierdzenie 1.1) jest również w pewnym



Rys. 3. Geometryczna interpretacja odwzorowania $(x, y) \leftrightarrow (\bar{x}, \bar{y})$

$$\begin{cases} \bar{x} = x + 2y \\ \bar{y} = x + y \end{cases} \quad \begin{cases} x = 2\bar{y} - \bar{x} \\ y = \bar{x} - \bar{y} \end{cases}$$



Rys. 4. Geometryczny dowód niewspółmierności przekątnej CB i boku CA kwadratu

sensie najlepszy. Wyjaśniają to następujące własności ułamków łańcuchowych [Chinczyn, 1964]:

(1) *Każdy redukt p/q ułamka łańcuchowego danej liczby niewymiernej α jest najlepszym możliwym wymiernym przybliżeniem tej liczby o mianowniku nie większym od q .*

(2) *Jeśli ułamek nieprzywiedlny spełnia nierówność $|\frac{p}{q} - \alpha| < \frac{1}{2q^2}$, to jest jednym z reduktów ułamka łańcuchowego liczby α .*

Jeśli postawimy pytanie o najlepsze przybliżenie inaczej, pytając o liczbę wymierną o najmniejszym możliwym mianowniku będącą najlepszym przybliżeniem liczby niewymiernej α z żadaną dokładnością, to niekoniecznie będzie nią redukt ułamka łańcuchowego reprezentującego tę liczbę. Na przykład liczba $\frac{4}{3}$ nie występuje w ciągu (6), a jest najlepszym, w powyższym sensie, przybliżeniem wymiernym liczby $\sqrt{2}$, dla którego $|\sqrt{2} - \frac{p}{q}| < 0,081$.

Mamy bowiem $|\sqrt{2} - \frac{1}{1}| > |\sqrt{2} - \frac{3}{2}| > 0,085$, ale $|\sqrt{2} - \frac{4}{3}| = 0,080\dots < 0,081$.

Zainteresowanym historią bogatego świata liczb niewymiernych, w szczególności historią zagadnień związanych z ich wymierną aproksymacją, polecamy fascynującą monografię [Havil, 2012].

Bibliografia

- [Apostol, Mnatsakanian, 2002] T. Apostol, M. A. Mnatsakanian, *Surprisingly Accurate Rational Approximations*, Mathematics Magazine, Vol. 75, No. 4 (Oct., 2002), pp. 307-310.
- [Euclid] Euclid's Elements, Book X: <http://aleph0.clarku.edu/~djoyce/elements/bookX/propX2.html>
- [Havil, 2012] J. Havil, *Irrationals*, Princeton University Press, 2012.
- [Chinczyn, 1964] A. Ya. Khinchin, *Continued Fractions*, The University of Chicago Press, 1964.
- [Krzyżanowski, 2021] P. Krzyżanowski, G. Łukaszewicz, *Przez wieki z metodą Newtona*, Δ_{21} .
- [Olds, 2000] C. D. Olds, A. Lax, and G. P. Davidoff, *Geometry of Numbers*, The Mathematical Association of America, 2000.
- [Sierpiński, 1965] W. Sierpiński, *Wstęp do teorii liczb*, Warszawa 1965.



Zadania

Przygotował Dominik BUREK

M 1831. Na tablicy zapisana jest cyfra 7. Wanda i Staś na zmianę dodają jedną cyfrę do aktualnej liczby na tablicy, zaczyna Wanda. Cyfrę można dodać na początku liczby (z wyjątkiem zera), na jej końcu lub pomiędzy dowolnymi dwiema cyframi. Zwycięzcą zostaje ta osoba, po ruchu której liczba na planszy jest kwadratem liczby całkowitej. Udowodnić, że żaden z graczy nie może być pewien wygranej.

M 1832. Niech $n \geq 3$ będzie liczbą całkowitą. Udowodnić, że dla dowolnej liczby całkowitej $1 \leq k \leq \binom{n}{2}$ istnieje zbiór $\mathcal{A}$ składający się z n takich liczb całkowitych dodatnich, że zbiór

$$\{\text{NWD}(x, y) : x, y \in \mathcal{A}, x \neq y\}$$

zawiera dokładnie k różnych elementów.

M 1833. Niech $ABCD$ będzie czworokątem wypukłym. Punkty X i Y leżą na przedłużeniach boków, odpowiednio, CD i AD (przedłużamy od strony punktu D) w taki sposób, że $DX = AB$ i $DY = BC$. Podobnie punkty Z i T leżą na przedłużeniach boków, odpowiednio, CB i AB (od strony B) w taki sposób, że $BZ = AD$ i $BT = DC$. Niech M_1 będzie środkiem XY , a M_2 środkiem ZT . Udowodnić, że proste DM_1 , BM_2 i AC przecinają się w jednym punkcie.

Przygotował Andrzej MAJHOFER

F 1129. W najniższej warstwie atmosfery (w troposferze) temperatura powietrza jednostajnie maleje z wysokością, po czym (w stratosferze) zaczyna rosnąć wraz ze wzrostem wysokości nad powierzchnią Ziemi. Wysokość tropopauzy – granicy między troposferą i stratosferą – zależy od szerokości geograficznej i zmienia się od około 18 km nad równikiem do około 6 km nad biegunami (średnia to ok. 13 km). Natężenie dźwięku samolotu lecącego w obszarze tropopauzy, w warstwie powietrza o grubości rzędu 1 km, maleje z odległością R od źródła jak $1/R$. Z czego wynika taka zależność?

F 1130. Stacja kosmiczna ma kształt walca o promieniu r_0 . W dążeniu do stworzenia astronautom warunków możliwie zbliżonych do warunków na Ziemi stację wypełniono powietrzem i nadano jej ruch obrotowy z prędkością kątową ω dobraną tak, żeby na brzegu walca przyspieszenie było równe przyspieszeniu ziemskiemu, g . Jaki jest stosunek p_0 ciśnienia powietrza na brzegu stacji do ciśnienia p_c w jej centrum (tj. na osi walca)? Średnia molowa masa powietrza wynosi μ , a wewnątrz stacji temperatura jest stała i w skali Kelvina wynosi T .

Rozwiązania na str. 24