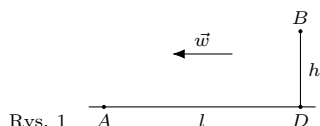


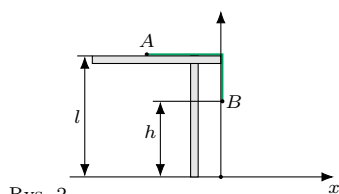
Klub 44 F



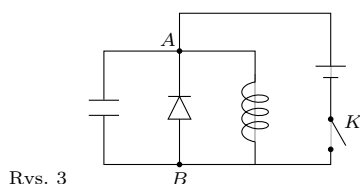
Termin nadsyłania rozwiązań: 31 XII 2025



Rys. 1



Rys. 2



Rys. 3

Czołówka ligi zadaniowej **Klub 44 F**
po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań
794 ($WT = 3,7$), 795 ($WT = 2,5$)
z numeru 3/2025

Jacek Konieczny	Poznań	41,11
Jan Zambrzycki	Białystok	4–35,42
Andrzej Nowogrodzki		
	Chocianów	3–29,98
Paweł Perkowski	Ożarów Maz.	6–17,63
Paweł Kubit	Kraków	17,21
Tomasz Wietecha	Tarnów	18–14,63
Krzysztof Zygan	Lubin	14,52

Z zasady zachowania energii

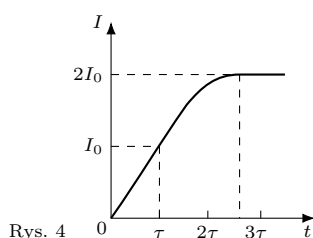
$LI_0^2/2 + C\mathcal{E}^2/2 = LI_{\max}^2/2$, gdzie $I_{\max} = 2I_0 = 2\mathcal{E}\tau/L$,
otrzymujemy:

$$LC = 3\tau^2.$$

Natężenie prądu w cewce zmienia się od wartości I_0 do $2I_0$,
gdy wartość sinusa zmienia się od $1/2$ do 1 , a jego argument
od $\pi/6$ do $\pi/2$, czyli szukany czas wynosi:

$$\Delta\tau = T/6 = \pi\sqrt{3}\tau/3 \cong 1,8\tau.$$

W chwili $t = \tau + \Delta\tau \cong 2,8\tau$ potencjały punktów A i B
wyrównują się, opór odcinka z diodą w kierunku od B do A
staje się równy zero. Od tego momentu przez cewkę płynie
stały prąd $2I_0$, a ładunek kondensatora wynosi 0 .



Rys. 4

Zadania z fizyki nr 804, 805

Redaguje Elżbieta ZAWISTOWSKA

804. Chłopiec znajduje się w punkcie A na brzegu rzeki, której prędkość nurtu wynosi w (rys. 1). Chłopiec może biec po brzegu z prędkością v i pływać rzeką z prędkością u względem wody, przy czym $u < v$. W jakiej odległości od punktu A znajduje się na brzegu punkt C , z którego chłopiec powinien zacząć pływać, aby dotrzeć do punktu B w najkrótszym czasie? Odległość $|BD|$ punktu B od brzegu wynosi h , odległość $|AD|$ jest równa l .

805. Para jednakowych małych kulek A i B połączonych nieważką nicią o długości l zaczyna ześlizgiwać się z gładkiego stołu o wysokości l , przy czym w chwili początkowej kulka B znajduje się na wysokości $h = 2l/3$ nad podłogą (rys. 2). Po dotknięciu podłogi kulka B przykleja się do niej, a kulka A spada w tym momencie ze stołu. Od jakiej wysokości kulki A nad podłogą nieć będzie napięta?

Rozwiązania zadań z numeru 6/2025

Przypominamy treść zadań:

800. W obwodzie przedstawionym na rysunku 3 dioda jest idealna i wszystkie opory omowe zaniedbywalne. Klucz K zamknięto na czas τ , a następnie otwarto. W chwili otwierania klucza natężenie prądu w cewce miało wartość I_0 . Po jakim czasie po otwarciu klucza osiągnęło ono wartość maksymalną równą $2I_0$? Narysuj wykres zależności natężenia prądu od czasu t ($0 < t < \infty$).

801. Statek kosmiczny przemieszcza się od Ziemi do Marsa po orbicie eliptycznej, której perihelium znajduje się na orbicie Ziemi, a aphelium na orbicie Marsa. Znaleźć czas przelotu oraz minimalny czas, w jakim kosmonauci będą musieli oczekiwać na Marsie na start w drogę powrotną po takiej samej orbicie. Okres obiegu Ziemi wokół Słońca wynosi $T_Z = 365,25$ dób, okres obiegu Marsa $T_M = 687$ dób. Przyjąć, że planety poruszają się po orbitach kołowych leżących w jednej płaszczyźnie.

800. Po zamknięciu klucza K napięcie na kondensatorze i cewce w bardzo krótkim czasie osiąga wartość $\mathcal{E}$ równą sile elektromotorycznej źródła. W przedziale czasowym τ ładunek na kondensatorze o pojemności C ma stałą wartość $C\mathcal{E}$ (prąd przez diodę nie płynie), a prąd płynący przez cewkę o współczynniku samoindukcji L narasta liniowo:

$$LdI/dt = \mathcal{E} \Rightarrow I = \mathcal{E}t/L, \quad 0 < t \leq \tau.$$

W chwili $t = \tau$, zgodnie z treścią zadania:

$$I(\tau) = I_0 = \mathcal{E}\tau/L.$$

Po otwarciu klucza natężenie prądu w cewce nadal rośnie w wyniku rozładowywania kondensatora.

$$Q/C + LdI/dt = 0, \quad I = dQ/dt, \quad d^2I/dt^2 + I/(LC) = 0, \quad Q(\tau) = C\mathcal{E}.$$

Ładunek na kondensatorze nie może zmienić się skokowo, zatem prostoliniowy odcinek zależności natężenia prądu w cewce od czasu przechodzi płynnie (bez skoku pochodnej) na część sinusoidy, której okres $T = 2\pi/\omega = 2\pi\sqrt{LC}$ (rys. 4).

801. Półś wielka a orbity, po której porusza się statek kosmiczny, równa jest połowie sumy promieni orbit Ziemi i Marsa (rys. 5): $a = (a_Z + a_M)/2$. Zgodnie z trzecim prawem Keplera $a_Z \sim T_Z^{2/3}$ i $a_M \sim T_M^{2/3}$. Analogicznie związana jest półś wielka orbity statku i okres jego obiegu T : $a \sim T^{2/3}$. Stąd $T^{2/3} = (T_Z^{2/3} + T_M^{2/3})/2$. Szukany czas przelotu statku od Ziemi do Marsa jest równy

$$\tau = (T_Z^{2/3} + T_M^{2/3})^{3/2} / 2^{5/2} \cong 259 \text{ dób}.$$

W chwili przylotu Ziemia wyprzedza Marsa o kąt

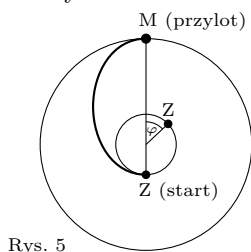
$$\varphi = \omega_Z\tau - \pi = 2\pi\tau/T_Z - \pi,$$

gdzie ω_Z jest prędkością kątową ruchu Ziemi względem Słońca. W chwili startu w podróż powrotną Ziemia powinna być cofnięta względem Marsa o taki sam kąt φ , innymi słowy – powinna wyprzedzać go o kąt $2\pi - \varphi$ (czas oczekiwania na Marsie ma być minimalny). Czas, po którym kąt wyprzedzenia zmienia się od φ do $2\pi - \varphi$, wynosi

$$t = (2\pi - 2\varphi)/(\omega_Z - \omega_M),$$

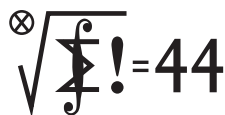
gdzie $(\omega_Z - \omega_M)$ jest względną prędkością kątową ruchu Ziemi i Marsa. Minimalny czas oczekiwania kosmonautów na Marsie jest równy

$$t = (2 - 2\tau/T_Z)/(1/T_Z - 1/T_M) \cong 457 \text{ dób}.$$



Rys. 5

Klub 44 M



Termin nadsyłania rozwiązań: 31 XII 2025

Czołówka ligi zadaniowej **Klub 44 M**
po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań
897 ($WT = 2,97$) i 898 ($WT = 1,22$)
z numeru 3/2025

Marek Spychała	Warszawa	47,41
Piotr Wiśniewski	Warszawa	45,51
Grzegorz Wiączkowski		44,90
Marcin Kasperski	Warszawa	43,44
Andrzej Daniluk	Warszawa	40,76
Krzysztof Kamiński	Pabianice	38,09
Krzysztof Maziarski	Londyn	38,05
Jerzy Cisło	Wrocław	37,59
Marian Łupieżowiec	Gliwice	35,90
Barbara Mroczek		34,09
Mikołaj Znamierowski		33,62
Roksana Słowik		33,00

Pan Marek Spychała to już dwukrotnie Weteran: 6×44 (!). Pan Piotr Wiśniewski goni czołówkę: 2×44 , w krótkim czasie. A pan Grzegorz Wiączkowski, 1×44 , to nowa postać w naszym Klubie – w ostatnich czasach nie tak często mamy okazję witać nowych przybyszów.

903. Z równości

$$\begin{aligned} (x-1)f(x) &= x^{43} - 1 + 45(x^{44} - x^{43}) \\ &= 45x^{44} - 44x^{43} - 1, \\ (1) \quad (x-1)g(x) &= x^{45} - 1 + 45(x^{46} - x^{45}) \\ &= 45x^{46} - 44x^{45} - 1 \end{aligned}$$

otrzymujemy związek

$$(x-1)(g(x) - f(x)) = x^{43}(x^2 - 1)(45x - 44),$$

i dalej (dla $x \neq 1$, ale dla $x = 1$ też, bo to wielomiany):

$$(2) \quad g(x) - f(x) = x^{43}(x+1)(45x - 44).$$

Liczby a, b dane są równaniem $f(a) = g(b) = 44$. Dla $x < 0$ mamy na mocy wzorów (1):

$$(x-1)(f(x) - 44) = 45x^{44} - 44x^{43} - 1 - 44x + 44 > 0,$$

$$(x-1)(g(x) - 44) = 45x^{46} - 44x^{45} - 1 - 44x + 44 > 0,$$

więc $f(x) - 44 < 0$, $g(x) - 44 < 0$ (dla $x < 0$). Zatem $a, b \geq 0$.

Ze wzoru (2) widać, że $f(\frac{44}{45}) = g(\frac{44}{45})$. Prosty rachunek (oparty na wzorach (1)) pokazuje, że ta wspólna wartość wynosi 45. W zbiorze liczb nieujemnych funkcje f, g są ściśle rosnące, przy czym $f(0) = g(0) = 1$. Stąd wniosek, że $a, b \in (0, \frac{44}{45})$. Ponieważ $f(x) > g(x)$ w tym przedziale (wzór (2)), więc gdyby zachodziła nierówność $a \geq b$, mielibyśmy $44 = f(a) > g(a) \geq g(b) = 44$, sprzeczność. Stąd odpowiedź na pytanie zadania: $a < b$.

Zadania z matematyki nr 907, 908

Redaguje Marcin E. KUCZMA

907. Niech n będzie ustaloną liczbą naturalną, $n \geq 3$. Znaleźć największą liczbę naturalną m , dla której istnieją różne liczby rzeczywiste $x_1, \dots, x_m$ takie, że wartość wyrażenia

$$\sum_{i=0}^n x_k^{n-i} x_l^i$$

jest jednakowa dla każdej pary różnych numerów $k, l \in \{1, \dots, m\}$.

908. Wyznaczyć wszystkie liczby całkowite $a \geq 1$ o tej własności, że dla każdej liczby całkowitej $n \geq 1$ suma $1 + a + \dots + a^{n-1}$ jest liczbą trójkątną.

Zadanie 908 zaproponował pan Witold Bednarek z Łodzi.

Rozwiązania zadań z numeru 6/2025

Przypominamy treść zadań:

903. Funkcje f i g są dane wzorami

$$f(x) = (1 + x + x^2 + x^3 + \dots + x^{42}) + 45x^{43},$$

$$g(x) = (1 + x + x^2 + x^3 + \dots + x^{44}) + 45x^{45}.$$

Liczby rzeczywiste a, b spełniają warunki $f(a) = g(b) = 44$. Wyjaśnić, która z liczb a, b jest większa.

904. Niech $A_1 = 31$, $A_2 = 331$, $\dots$, $A_n = 33 \dots 31$ (n trójek, a na końcu jedynka – zapis dziesiętny). Dla każdej liczby pierwszej $p < 44$ rozstrzygnąć, czy istnieje liczba n (zależna od p), dla której A_n dzieli się przez p . Jeśli istnieje, ustalić, czy jest wówczas nieskończenie wiele, czy tylko skończenie wiele takich numerów n .

904. Liczba A_n wyraża się wzorem

$$A_n = \frac{1}{3}(10^{n+1} - 1) - 2 = \frac{1}{3}(10^{n+1} - 7).$$

Widać od razu, że (dla żadnego n) nie dzieli się przez 2, 3, 5, 7. Dalej badamy podzielność przez liczby pierwsze $p \in [11, 43]$. Jest to więc pytanie o to, czy w ciągu $10, 100, 1000, \dots \pmod{p}$ pojawia się siódemka. Jeżeli tak – niech np. $10^m \equiv 7 \pmod{p}$ – to ponieważ $10^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$, więc minimalny taki wykładnik m znajduje się w przedziale $[0, p-2]$. Dla każdego $k \geq 0$ mamy wówczas $10^{k(p-1)+m} \equiv 7 \pmod{p}$, co oznacza, że w tym przypadku istnieje nieskończenie wiele liczb n , o jakie pyta zadanie. Jeżeli natomiast wśród liczb $10, 10^2, \dots, 10^{p-2}$ branych $\pmod{p}$ nie ma siódemki, to nie ma jej w całym nieskończonym ciągu $10, 10^2, 10^3, \dots \pmod{p}$, więc nie istnieje liczba n , o jaką pyta zadanie.

Rozstrzygnięcie (dla $p < 44$) kwestii; siódemka [pojawia się/nie pojawia się] najprościej uzyskać, pisząc banalny programik numeryczny. Wychodzi odpowiedź *tak* dla $p = 17, 19, 23, 29, 31$ (minimalny wykładnik m wynosi, odpowiednio, 9, 12, 21, 20, 2); *nie* dla $p = 2, 3, 5, 7, 11, 13, 37, 41, 43$.

[Czytelników, którzy z niechęcią widzą użycie urządzenia obliczeniowego, zachęcamy do ręcznego przeszukania stosownych wartości (zamiast badania potęg 10^l dla $l < p-1$ wystarczy rozważać $l < \delta$, gdzie $\delta = \min: 10^\delta \equiv 1 \pmod{p}$). Stosując proste sztuczki w operowaniu kongruencjami, daje się to zrobić w przeciągu kilkunastu minut na niewielkiej kartce papieru.]

Skrót regulaminu

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru n w terminie do końca miesiąca $n + 2$. Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze $n + 4$. Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przysyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**. Można je przysyłać również pocztą elektroniczną pod adresem delta@mimuw.edu.pl (preferujemy pliki pdf). Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez

współczynnik trudności danego zadania: $WT = 4 - 3S/N$, przy czym S oznacza sumę ocen za rozwiązania tego zadania, a N – liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (**M** lub **F**) – i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu 44 punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (**M** lub **F**), zostaje on członkiem **Klubu 44**, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo – to tytuł **Weterana**. Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 2/2002 oraz znajduje się na stronie deltami.edu.pl.