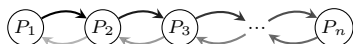
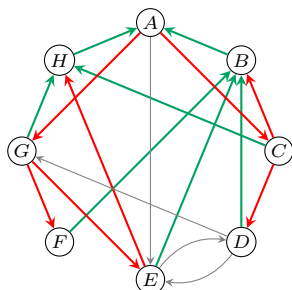


* Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Uniwersytet Warszawski

Dla przykładu, przy czterech plotkujących A, B, C, D wystarczą cztery połączenia: najpierw A rozmawia z B , potem C rozmawia z D , następnie A rozmawia z D (dzięki czemu obaj wiedzą wszystko o wszystkich) i na koniec B rozmawia z C (przez co oni również stają się wszechwiedzący). Można nietrudną analizą uzasadnić, że w tym wypadku trzy połączenia to za mało.



Intensywność strzałki odpowiada kolejności, w jakiej plotkarze powinni wysłać listy, żeby wszyscy dowiedzieli się wszystkiego o wszystkich



Tak mógłby wyglądać graf skierowany możliwych połączeń między ośmioma plotkarzami. Na zielono zaznaczono połączenia odpowiadające 7 listom, dzięki którym A dowiaduje się wszystkiego od pozostałych, zaś na czerwono – 7 listów, za pośrednictwem których pozostali plotkarze dowiadują się następnie wszystkiego od A . Zielone i czerwone krawędzie nie muszą być rozłączne, jednak zostały tak wybrane dla czytelności

Plotkare humanum est. Każdy z nas lubi być dystrybutorem plotek, choć niekoniecznie ich obiektem. W artykule *Plotki, ploteczki, plotunie...* z Δ_{22}^{12} zastanawialiśmy się, jak szybko mogą roznosić się plotki w grafach. Przypomnijmy rozważany tam model: w pewnym mieście znajduje się n plotkarzy, z których każdy zna każdego. Podczas rozmowy telefonicznej dwóch plotkarzy wymienia się wszystkimi posiadanymi informacjami. Na początku dnia każdy z plotkarzy jest w posiadaniu pewnej informacji, której nie ma żaden z pozostałych. Jaka jest najmniejsza liczba rozmów telefonicznych, które należy przeprowadzić, aby wszyscy wszystko wiedzieli?

W przytoczonym artykule pada odpowiedź: $2n - 4$, wraz z bardzo chytrym uzasadnieniem. W niniejszym tekście zastanowimy się, co by było, gdyby fabuła zadania rozgrywała się 300 lat wcześniej, w czasach gdy jedyną formą plotkowania na odległość było pisanie listów.

Na początek pewna rozsądnie brzmiąca intuicja: w kontekście wymieniania się plotkami jedna rozmowa telefoniczna jest równoważna wysyłce dwóch listów. Skoro współcześnie potrzebujemy $2n - 4$ połączeń telefonicznych do zrealizowania plotkarskich zamierzeń, to można by oczekiwać, że w czasach przedtelefonowych wymagana liczba listów to około dwukrotność tej liczby, czyli $4n - 4$ („około” bierze się z dopuszczenia drobnych subtelności, mogących zmienić wynik o stałą).

Czytelnik Podejrzliwy przeczuwa zapewne, że przedstawienie na początku artykułu „rozsądnie brzmiącej intuicji” zwiastuje jej rychłe obalenie – i tak też jest w tym przypadku. Wystarczy bowiem $2n - 2$ listów, czyli tylko o dwa więcej niż połączeń telefonicznych! Uzasadnimy najpierw, dlaczego tyle wystarczy. Ustawmy naszych plotkarzy w ciąg $P_1, \dots, P_n$ i niech i -tym wysłanym listem będzie $P_i \rightarrow P_{i+1}$ dla $i \leq n - 1$ oraz $P_{2n-i} \rightarrow P_{2n-i-1}$ dla $n \leq i \leq 2n - 2$. Innymi słowy, puszczamy najpierw „łańcuszek” od P_1 do P_n , tak by P_n stał się wszechwiedzący, a potem pozwalamy P_n odesłać tę wiedzę pozostałym, aż do P_1 .

Pokażemy teraz, że mniejsza liczba listów nie wchodzi w grę. Zauważmy najpierw, że po $n - 2$ wysłanych listach żaden z plotkarzy nie wie wszystkiego o wszystkich. Rzeczywiście, aby taki plotkarz zaistniał, każdy z pozostałych $n - 1$ plotkarzy musiał rozstać się ze swoją tajemnicą, a to następuje wyłącznie na skutek wysłania do kogoś listu. Począwszy od $(n - 2)$ -go listu, każdy kolejny zwiększa liczbę „wszechwiedzących” plotkarzy o co najwyżej 1, gdyż tylko odbiorca wiadomości powiększa w wyniku jej wysłania swoją wiedzę (w przypadku telefonicznym jest inaczej, co utrudnia jego analizę). Ponieważ dążymy do uzyskania n wszechwiedzących plotkarzy, musi być wysłanych jeszcze co najmniej n listów, co daje szukane ograniczenie $2n - 2$.

Zastanówmy się jeszcze, czy odpowiedź na nasze pytanie uległaby zmianie, gdyby każdy z plotkarzy miał „czarną listę” innych plotkarzy, do których na pewno nigdy nie wyśle korespondencji (bo na przykład kiedyś rozpuszczali o nim kłamliwe plotki). Wyobraźmy sobie graf, którego wierzchołkami są plotkarze, zaś strzałka od plotkarza A do B oznacza, że ten pierwszy dopuszcza wysłanie listu do tego drugiego. Żeby w opisanej sytuacji pełna wymiana informacji była w ogóle możliwa, przedstawiony graf musi być *silnie spójny* – z każdego wierzchołka możemy dojść do dowolnego innego, poruszając się po strzałkach. Założmy zatem, że tak jest, i wybierzmy dowolnego plotkarza A . Z założenia o silnej spójności wynika, że z wszystkich plotkarzy i wybranych połączeń między nimi możemy utworzyć „drzewo skierowane w górę”, do znajdującego się na szczycie A . W takim grafowym drzewie o n wierzchołkach mamy zawsze $n - 1$ krawędzi, zatem tyle listów wystarczy, aby A dowiedział się wszystkiego o wszystkich (listy wysyłane są w kolejności wyznaczonej przez „drzewową” odległość od A). Możemy też utworzyć inne drzewo z A na szczycie, w którym wszystkie krawędzie będą skierowane „w dół”. To drzewo pozwoli A rozdystrybuować swoją wszechwiedzę wśród pozostałych plotkarzy za pomocą kolejnych $n - 1$ listów. Wniosek: jeśli tylko plotkarze mogą w pełni wymienić się informacjami, wystarczy im do tego celu $2n - 2$ wysłanych listów. Niezależnie od tego, kto, z kim, dlaczego, na co, po co i w jakim celu.