

sensie najlepszy. Wyjaśniają to następujące własności ułamków łańcuchowych [Chinczyn, 1964]:

(1) *Każdy redukt p/q ułamka łańcuchowego danej liczby niewymiernej α jest najlepszym możliwym wymiernym przybliżeniem tej liczby o mianowniku nie większym od q .*

(2) *Jeśli ułamek nieprzywiedlny spełnia nierówność $|\frac{p}{q} - \alpha| < \frac{1}{2q^2}$, to jest jednym z reduktów ułamka łańcuchowego liczby α .*

Jeśli postawimy pytanie o najlepsze przybliżenie inaczej, pytając o liczbę wymierną o najmniejszym możliwym mianowniku będącą najlepszym przybliżeniem liczby niewymiernej α z żadaną dokładnością, to niekoniecznie będzie nią redukt ułamka łańcuchowego reprezentującego tę liczbę. Na przykład liczba $\frac{4}{3}$ nie występuje w ciągu (6), a jest najlepszym, w powyższym sensie, przybliżeniem wymiernym liczby $\sqrt{2}$, dla którego $|\sqrt{2} - \frac{p}{q}| < 0,081$.

Mamy bowiem $|\sqrt{2} - \frac{1}{1}| > |\sqrt{2} - \frac{3}{2}| > 0,085$, ale $|\sqrt{2} - \frac{4}{3}| = 0,080 \dots < 0,081$.

Zainteresowanym historią bogatego świata liczb niewymiernych, w szczególności historią zagadnień związanych z ich wymierną aproksymacją, polecamy fascynującą monografię [Havil, 2012].

Bibliografia

- [Apostol, Mnatsakanian, 2002] T. Apostol, M. A. Mnatsakanian, *Surprisingly Accurate Rational Approximations*, Mathematics Magazine, Vol. 75, No. 4 (Oct., 2002), pp. 307-310.
- [Euklides] Euclid's Elements, Book X: <http://aleph0.clarku.edu/~djoyce/elements/bookX/propX2.html>
- [Havil, 2012] J. Havil, *Irrationals*, Princeton University Press, 2012.
- [Chinczyn, 1964] A. Ya. Khinchin, *Continued Fractions*, The University of Chicago Press, 1964.
- [Krzyżanowski, 2021] P. Krzyżanowski, G. Łukaszewicz, *Przez wieki z metodą Newtona*, Δ_{21} .
- [Olds, 2000] C. D. Olds, A. Lax, and G. P. Davidoff, *Geometry of Numbers*, The Mathematical Association of America, 2000.
- [Sierpiński, 1965] W. Sierpiński, *Wstęp do teorii liczb*, Warszawa 1965.



Zadania

Przygotował Dominik BUREK

M 1831. Na tablicy zapisana jest cyfra 7. Wanda i Staś na zmianę dodają jedną cyfrę do aktualnej liczby na tablicy, zaczyna Wanda. Cyfrę można dodać na początku liczby (z wyjątkiem zera), na jej końcu lub pomiędzy dowolnymi dwiema cyframi. Zwycięzcą zostaje ta osoba, po ruchu której liczba na planszy jest kwadratem liczby całkowitej. Udowodnić, że żaden z graczy nie może być pewien wygranej.

M 1832. Niech $n \geq 3$ będzie liczbą całkowitą. Udowodnić, że dla dowolnej liczby całkowitej $1 \leq k \leq \binom{n}{2}$ istnieje zbiór $\mathcal{A}$ składający się z n takich liczb całkowitych dodatnich, że zbiór

$$\{\text{NWD}(x, y) : x, y \in \mathcal{A}, x \neq y\}$$

zawiera dokładnie k różnych elementów.

M 1833. Niech $ABCD$ będzie czworokątem wypukłym. Punkty X i Y leżą na przedłużeniach boków, odpowiednio, CD i AD (przedłużamy od strony punktu D) w taki sposób, że $DX = AB$ i $DY = BC$. Podobnie punkty Z i T leżą na przedłużeniach boków, odpowiednio, CB i AB (od strony B) w taki sposób, że $BZ = AD$ i $BT = DC$. Niech M_1 będzie środkiem XY , a M_2 środkiem ZT . Udowodnić, że proste DM_1 , BM_2 i AC przecinają się w jednym punkcie.

Przygotował Andrzej MAJHOFER

F 1129. W najniższej warstwie atmosfery (w troposferze) temperatura powietrza jednostajnie maleje z wysokością, po czym (w stratosferze) zaczyna rosnąć wraz ze wzrostem wysokości nad powierzchnią Ziemi. Wysokość tropopauzy – granicy między troposferą i stratosferą – zależy od szerokości geograficznej i zmienia się od około 18 km nad równikiem do około 6 km nad biegunami (średnia to ok. 13 km). Natężenie dźwięku samolotu lecącego w obszarze tropopauzy, w warstwie powietrza o grubości rzędu 1 km, maleje z odległością R od źródła jak $1/R$. Z czego wynika taka zależność?

F 1130. Stacja kosmiczna ma kształt walca o promieniu r_0 . W dążeniu do stworzenia astronautom warunków możliwie zbliżonych do warunków na Ziemi stację wypełniono powietrzem i nadano jej ruch obrotowy z prędkością kątową ω dobraną tak, żeby na brzegu walca przyspieszenie było równe przyspieszeniu ziemskiemu, g . Jaki jest stosunek p_0 ciśnienia powietrza na brzegu stacji do ciśnienia p_c w jej centrum (tj. na osi walca)? Średnia molowa masa powietrza wynosi μ , a wewnątrz stacji temperatura jest stała i w skali Kelvina wynosi T .

Rozwiązania na str. 24

Rozwiązania zadań ze strony 12



Rozwiązanie zadania F 1129.

Prędkość c dźwięku w gazie o temperaturze bezwzględnej T , molowej masie μ i wykładniku adiabaty κ wynosi:

$$c = \sqrt{\frac{\kappa RT}{\mu}}$$

(R jest stałą gazową). Wraz z oddalaniem się od tropopauzy w górę lub w dół temperatura powietrza rośnie, a więc rośnie też prędkość dźwięku. Oznacza to, że fale dźwiękowe wzbudzone w tropopauzie są załamywane zawsze w stronę tropopauzy, a więc dźwięk efektywnie rozprzestrzenia się w dwuwymiarowym obszarze tropopauzy, co prowadzi do malenia jego natężenia z odległością od źródła jak $1/R$.



Rozwiązanie zadania F 1130.

Obracająca się stacja jest układem nieinercyjnym. W jej wnętrzu przyspieszenie odśrodkowe $a(r)$ zmienia się z odległością r od osi walca: $a(r) = \omega^2 r$. Na brzegu walca $a(r_0) = \omega^2 r_0 = g$, czyli:

$$a(r) = \frac{gr}{r_0}.$$

Po ustaleniu równowagi powietrze obraca się wraz z całą stacją, a przyspieszenie $a(r)$ odgrywa rolę pola grawitacyjnego. Znajdziemy rozkład ciśnienia $p(r)$ w polu $a(r)$. Niech $\rho(r)$ oznacza gęstość powietrza w odległości r od osi obrotu. Mamy:

$$\frac{dp}{dr} = a(r)\rho(r).$$

Powietrze spełnia równanie gazu doskonałego, a więc:

$$\rho(r) = \frac{p(r)\mu}{RT}.$$

R oznacza tu stałą gazową. Otrzymujemy równanie:

$$\frac{dp}{dr} = \left(\frac{\mu gr}{r_0 RT} \right) p,$$

którego rozwiązaniem jest ($p_c = p(0)$):

$$p(r) = p_c \exp\left(\frac{\mu gr^2}{2r_0 RT}\right).$$

Szukany stosunek ciśnień wynosi więc:

$$\frac{p_c}{p_0} = \exp\left(-\frac{\mu gr_0}{2RT}\right).$$



Rozwiązanie zadania M 1831.

W pierwszym ruchu Wanda nie przegra, ponieważ nie ma dwucyfrowych kwadratów liczb całkowitych z cyfrą 7. Pokażemy teraz, że każdy z graczy może mieć pewność, że nie przegra, wybierając jedną z cyfr 7 lub 8 i dodając ją na końcu bieżącej liczby w grze.

Istotnie, kwadrat liczby całkowitej nie może kończyć się cyfrą 7 ani 8, więc przy tej strategii przeciwnik może wygrać jedynie poprzez dodanie nowej cyfry na końcu liczby. Załóżmy, że po dopisaniu cyfry 7 do aktualnej liczby A istnieje zwycięska odpowiedź – dopisanie cyfry 4, a poprzez dopisanie cyfry 8 istnieje zwycięska odpowiedź

– przypisanie cyfry y . W tym przypadku liczby $\overline{A7x}$ i $\overline{A8y}$ byłyby kwadratami liczb całkowitych. Różnica między nimi wyniosłaby mniej niż 20, ale każda z tych liczb jest co najmniej trzycyfrowa i różnica między sąsiednimi kwadratami takich liczb całkowitych wynosi co najmniej $11^2 - 10^2 > 20$.



Rozwiązanie zadania M 1832.

Rozpatrzmy dowolny graf $\mathcal{G}$ o $k-1$ krawędziach oraz n wierzchołkach ponumerowanych kolejno $1, 2, \dots, n$, i mający $k-1$ krawędzi. Niech p_n oznacza n -tą liczbę pierwszą. Każdej krawędzi $\mathcal{G}$ przypiszmy pewną liczbę pierwszą ze zbioru $\{p_1, p_2, \dots, p_{k-1}\}$. Natomiast wierzchołkowi o numerze i przypiszmy iloczyn liczb pierwszych odpowiadających krawędzom wychodzącym z tego wierzchołka oraz liczby p_{k+i} .

Liczby przypisane wierzchołkom są parami różne, gdyż wierzchołek o numerze i ma przypisaną liczbę, która jako jedyna jest podzielna przez p_{k+i} . Ponadto zbiór największych wspólnych dzielników par tych n liczb składa się dokładnie z liczb $p_1, p_2, \dots, p_{k-1}$ oraz 1. Wobec tego zbiór $\mathcal{A}$ wszystkich liczb przypisanych wierzchołkom $\mathcal{G}$ spełnia warunki zadania.



Rozwiązanie zadania M 1833.

W rozwiązaniu użyjemy dobrze znanej (i bardzo przydatnej!) konsekwencji twierdzenia sinusów w trójkącie (zob. też KPO na stronie 25):

W trójkącie ABC punkt D leży na odcinku BC . Wówczas

$$\frac{BD}{DC} = \frac{\sin \sphericalangle BAD}{\sin \sphericalangle DAC} \cdot \frac{BA}{AC}.$$

Niech DM_1 przecina AC w punkcie P . Wówczas

$$\begin{aligned} \frac{AP}{PC} &= \frac{\sin \sphericalangle ADP}{\sin \sphericalangle PDC} \cdot \frac{AD}{DC} = \frac{\sin \sphericalangle YDM_1}{\sin \sphericalangle M_1DX} \cdot \frac{AD}{DC} \\ &= \frac{YM_1}{M_1X} \cdot \frac{XD}{DY} \cdot \frac{AD}{DC} = \frac{XD}{DY} \cdot \frac{AD}{DC}. \end{aligned}$$

Podobnie, jeśli BM_2 przecina AC w punkcie P' , uzyskamy

$$\frac{AP'}{P'C} = \frac{ZB}{BT} \cdot \frac{AB}{BC}.$$

Jednakże na podstawie danych w zadaniu zależności prawe strony ostatnich dwóch równości mają tę samą wartość, więc $P = P'$.

