

języka, czasu, pamięci, śmierci i doświadczenia ludzkiego. Struktura książki jest wyraźnie oparta na wzorcach matematycznych. Oto kończący fragment z książki *Niewidzialne miasta*, odpowiedni na ponure czasy: *Piektło żyjących nie jest czymś, co nastanie; jeśli istnieje, jest już tutaj, jest piekłem, w którym żyjemy na co dzień, które tworzymy, przebywając razem. Są dwa sposoby, aby nie sprawiało ono cierpienia. Pierwszy jest nietrudny dla wielu ludzi: zaakceptować piekło i stać się jego częścią, aż przestanie się je dostrzegać. Drugi jest ryzykowny i wymaga ciągłej uwagi i ćwiczenia: odszukać i umieć rozpoznać, kto i co pośród piekła piekłem nie jest, i utrwalić to, i rozprzestrzenić.*

O sztucach, szaleństwie i nieskończoności

Życie i twórczość Georga Cantora

*Studium Matematyki, Uniwersytet Radomski im. Kazimierza Pułaskiego

Artykuł powstał na bazie wykładu pod tym samym tytułem, wygłoszonego podczas konferencji *Kształcenie myślenia analitycznego a realizacja podstawy programowej*, zorganizowanej przez Radomski Ośrodek Doskonalenia Nauczycieli i Stowarzyszenie Nauczycieli Matematyki 15 marca 2025 roku.



Młody Georg Cantor

Szymon JANISZEWSKI*

Pochodzenie, dzieciństwo

Georg Ferdinand Ludwig Philipp Cantor urodził się 3 marca 1845 roku w Petersburgu jako najstarsze dziecko Marii Anny Böhm i Georga Woldemara Cantora. Ojciec był zamożnym kupcem i finansistą. O jego pochodzeniu, dzieciństwie i młodości wiadomo niewiele: urodził się pomiędzy 1809 a 1814 rokiem, prawdopodobnie w Kopenhadze, do której jego rodzice sprowadzili się z Hiszpanii lub Portugalii. Rodzina Marii Anny wywodziła się z Austrii. Jej stryj, Joseph Böhm, był utalentowanym i znanym muzykiem, dyrektorem wiedeńskiego konserwatorium. Maria Anna i Georg Woldemar pobrali się w 1842 roku w Petersburgu, w obrządku luteranckim. Maria Anna była katoliczką, Georg Woldemar – luteraninem, i to bardzo pobożnym, więc wybór zboru jako miejsca zawarcia związku małżeńskiego raczej nie dziwi. Oddanie ewangelicyzmowi Georg Woldemar przekazał najstarszemu synowi. Biografowie Georga juniora nie są zgodni co do liczby rodzeństwa przyszłego wielkiego matematyka – w źródłach można znaleźć informacje o czwórce lub szóstce dzieci Marii Anny i Georga Woldemara. Pewna jest za to informacja o chorobie ojca rodziny, z którym młody Georg był bardzo związany emocjonalnie. W połowie XIX wieku gruźlica była nieuleczalna, łagodzona jedynie jej przebieg terapią klimatyczną. Właśnie w poszukiwaniu bardziej sprzyjających warunków klimatycznych Cantorowie opuścili Petersburg, i w 1856 roku przenieśli się do Niemiec: najpierw do Wiesbaden, a później – do Frankfurtu. Georg Cantor junior z nostalgią wspominał swoje rosyjskie dzieciństwo – w Niemczech, gdzie spędził resztę swojego życia, nigdy nie czuł się najlepiej.

Młodość, małżeństwo, rozkwit kariery

Po ukończeniu szkół, w 1862 roku, Georg rozpoczął studia w Höhere Gewerbeschule Darmstadt (obecnie Uniwersytet Techniczny w Darmstadt), by wkrótce przenieść się na Politechnikę Federalną w Zurychu. Tam również długo nie zagrzał miejsca – w 1863 roku ponownie zmienił uczelnię. Tym razem na Uniwersytet Berliński. Stało się to już po śmierci ojca. Odziedziczony spadek (pół miliona ówczesnych marek) umożliwiał skromnemu profesorowi matematyki godne życie jeszcze wiele lat później.

Podczas studiów w Berlinie Cantor słuchał wykładów takich sław, jak Leopold Kronecker, Karl Weierstrass i Ernst Kummer, zaprzyjaźnił się z Karlem Schwarzem. Doktorat z teorii liczb obronił w 1867 roku, przy merytorycznym wsparciu Kroneckera i Kummera. Po ukończeniu studiów i krótkim, kilkumiesięcznym zatrudnieniu w berlińskiej szkole dla dziewcząt, przyjął posadę *privatdozenta* na Uniwersytecie w Halle, gdzie profesorem matematyki był Eduard Heine. Zachęcany przez niego Cantor zajął się teorią szeregów trygonometrycznych. W 1872 roku opublikował artykuł, w którym udowodnił, że ciągłość funkcji na przedziale implikuje jednoznaczność jej reprezentacji w postaci szeregu trygonometrycznego. W artykule znalazły się jednak pewne przemyślenia autora, które wskazywały, że skieruje swój umysł

Privatdozent było to najniższe stanowisko akademickie na niemieckim uniwersytecie – otwierało możliwość prowadzenia badań pod afiliacją uczelni i zajęć ze studentami, ale bez prawa do wynagrodzenia.

Journal für die reines und angewandte Mathematik założone przez Augusta Leopolda Crellego w 1826 roku (stąd popularna nazwa *Crelle's Journal*) było w owym czasie najbardziej prestiżowym czasopismem matematycznym w Niemczech, a może i na świecie.

W XIX wieku w Niemczech na stanowiska profesorskie mianował właściwy minister. Procedura przewidywała zgłoszenie przez uniwersytet trzech kandydatur, a minister kolejno zwracał się do wymienionych zapytaniem, czy są zainteresowani stanowiskiem.

Wielokrotnie dementowana plotka głosi, że Alfred Nobel nie ufundował swojej nagrody w dziedzinie matematyki z powodu romansowej natury Mittag-Lefflera. Inna, nosząca pewne znamiona prawdopodobieństwa, informacja wskazuje, że Mittag-Leffler przyczynił się do przyznania Nagrody Nobla Marii Skłodowskiej-Curie, przełamując opory niektórych członków Komitetu Noblowskiego przed przyznaniem wyróżnienia kobiecie.

Cantor był na szczęście leczony łagodnymi metodami (głównie ciepłymi kąpielami) w nowo wybudowanej, pięknej uniwersyteckiej klinice psychiatrycznej, gdzie, jako słynny już profesor Cantor, cieszył się specjalnymi względami – m.in. miał nawet swój gabinet.



Leopold Kronecker

w inną stronę, mocno odległą od szeregów Fouriera. Także w 1872 roku (w wieku zaledwie 27 lat) Cantor uzyskał awans na stanowisko profesora nadzwyczajnego.

Wiosną 1874 roku Georg zaręczył się z przyjaciółką siostry – Vally Guttmann. 8 sierpnia tego samego roku para wstąpiła w związek małżeński. Cantorowie doczekali się szóstki dzieci, (najmłodszy, Rudolf, urodził się w 1886 r.). Małżeństwo zawarte z miłości przetrwało wszystkie burze. Niebagatelny wpływ na szczęście rodzinne miał charakter Georga, który w domowym zaciszu był człowiekiem bardzo zgodnym i łagodnym.

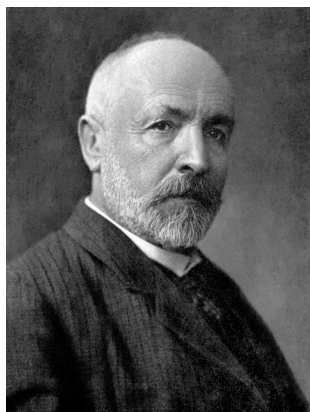
W latach siedemdziesiątych Cantor intensywnie korespondował z Richardem Dedekindem, który zajmował się zagadnieniem continuum zbioru liczb rzeczywistych. Zainspirowany tą problematyką Cantor przesłał do *Crelle's Journal* artykuł zawierający dosyć szokujący wniosek o istnieniu bijekcji z kwadratu na odcinek. Rezultat ten zirytował Kroneckera, który, jako redaktor czasopisma, wstrzymał publikację. Dopiero po interwencji Dedekinda, w 1878 roku artykuł mógł się ukazać. Sytuacja ta uwolniła potężną niechęć między Kroneckerem i Cantorem, który nigdy więcej niczego nie opublikował w *Crelle's Journal*. Przyjaźń z Dedekindem także zakończyła się raczej gwałtownie. Po śmierci Heinego, w październiku 1881 roku, pojawił się vacat na stanowisku profesora matematyki w Halle. Cantor zaproponował na to stanowisko Dedekinda, Heinricha Webera i Franza Mertensa (kolejność nazwisk istotna). Wszyscy trzej odmówili. Ostatecznie nominację uzyskał Friedrich Wangerin. Cantor nigdy nie nawiązał z nim bliższych stosunków: ani towarzyskich, ani naukowych. Korespondencja z Dedekindem zakończyła się, i przyjaźń też.

Nowym przyjacielem i powiernikiem Cantora został wpływowy (i niezwykle bogaty) szwedzki matematyk Gösta Mittag-Leffler. Był on fundatorem i redaktorem prestiżowego czasopisma *Acta Mathematica*. Mittag-Leffler zaproponował Cantorowi publikację kilku jego wcześniejszych prac we francuskim tłumaczeniu, którym zajęli się studenci Charles'a Hermite'a (między innymi Henri Poincaré). Cykl ukazał się w pierwszej połowie 1883 roku, wraz z nowym, oryginalnym artykułem. Kolejne publikacje pojawiły się w 1884 i 1885 roku. Podtytuł tej drugiej – *drugi komunikat* – wywołał spore zamieszanie. Pierwszym komunikatem miała być inna praca, która powinna była ukazać się w tym samym numerze czasopisma, ale została przez Cantora wycofana po (raczej błędnych) sugestjach Mittag-Lefflera. W wyniku tego zamieszania zażyłość obu uczonych zanikła.

Choroba. Konflikt z Kroneckerem

Podczas intensywnej pracy naukowej i wymiany korespondencji z Mittag-Lefflerem, latem 1884 roku, Cantor przeżył załamanie nerwowe. Dzisiaj uważamy, że był to pierwszy epizod choroby dwubiegunowej (zwanej do niedawna psychozą maniako-depresyjną). Ze wspomnień córki Elsy wiadomo, że początek choroby był gwałtowny i niespodziewany. Po około dwóch miesiącach stan uczonego uległ pewnej poprawie, tak że mógł on wrócić do swoich codziennych obowiązków. Ale odtąd życie Cantora naznaczały epizody manii i depresji oraz kolejne pobyty w szpitalach psychiatrycznych. Wielokrotnie podejmowane próby zmiany miejsca pracy – aplikował na stanowiska profesorskie w Berlinie i Getyndze, bo Uniwersytet w Halle postrzegany był jako prowincjonalny – kończyły się porażkami, prawdopodobnie pod wpływem zakulisowych działań Kroneckera. Potwornym ciosem dla wrażliwego matematyka-filozofa była śmierć syna Rudolfa w 1899 roku. Napastliwe wystąpienie Juliusa Königa podczas III Kongresu Matematyków w 1904 roku w Zurychu, mające w zamyśle autora podważyć teorie Cantora, także poskutkowało nawrotem choroby, mimo że już następnego dnia Ernst Zermelo obalił argumenty Königa.

„Naukowy szarlatan”, „renegat”, „deprawator młodzieży” – Kronecker nie hamował języka w ocenach, nie tylko pracy, ale również osoby Cantora. Zajadłość, z jaką ten, wybitny przecież, matematyk atakował młodszego kolegę, może zadziwiać. Cantor przynajmniej dwukrotnie podejmował próby pojednania ze swoim dawnym nauczycielem. Po raz pierwszy wspomniął o tym



Georg Cantor w wieku dojrzałym

Równoliczność odwzorowuje bardzo pierwotną i intuicyjną ideę liczenia na palcach. Obrazowy przykład dotyczy kelnera rozkładającego sztucze na wielkim stole, na którym ktoś inny wystawił mnóstwo talerzy. Kelner nie musi liczyć talerzy, by położyć odpowiednią liczbę widelców. Wystarczy, by przy każdym talerzu położył jeden widelec.

Galileusz zauważył, że można jednoznacznie powiązać każdą liczbę naturalną z liczbą parzystą, chociaż zbiór liczb parzystych jest właściwym podzbiorem zbioru liczb naturalnych.

Kurt Gödel, podobnie jak Cantor, zajmował się podstawami matematyki – logiką, problemami aksjomatyzacji, ale także teorią względności. I również zmarł w szpitalu psychiatrycznym.

Bibliografia

1. Amir Aczel, „Tajemnica alefów”, Rebis, 2002.
2. Joseph Dauben, „Georg Cantor and the Origins of Transfinite Set Theory”, *Scientific American*, 248(6).
3. Ivor Grattan-Guinness, „Towards a Biography of Georg Cantor”, *Annals of Science*, 27(4).
4. Helena Rasiowa, „Wstęp do matematyki współczesnej”, PWN, 2012.

Fotografie pochodzą z domeny publicznej: commons.wikimedia.org

w liście do Mittag-Lefflera z wakacji w górach Harzu, w 1884 roku. Ponownie spróbował w 1891 roku, gdy jako przewodniczący Niemieckiego Towarzystwa Matematycznego (wybrany mimo sprzeciwu Kroneckera) zaprosił swojego adwersarza do wygłoszenia wykładu na pierwszym zjeździe Towarzystwa. Ale Kronecker z tego zaproszenia skorzystał już nie mógł, gdyż czuwał przy łóżku umierającej żony, a kilka miesięcy po jej śmierci również odszedł z tego świata. Trudno przypisać wzajemną niechęć tych dwóch nietuzinkowych osobistości tylko różnicom w poglądach na filozoficzne podstawy matematyki. Wydaje się, że jej przyczyny musiały być bardziej złożone – możliwe, że także osobiste. Jedno jest chyba pewne – Kronecker wywarł ogromny wpływ na zdrowie i życie Cantora.

Schyłek

Do przejścia na emeryturę w 1913 roku Cantor pracował jako profesor Uniwersytetu w Halle. Był matematykiem sławnym i uznanym (w 1904 roku brytyjskie Royal Society nagrodziło go medalem Sylwestera, a w 1912 roku Uniwersytet w St. Andrews nadał mu tytuł doktora honoris causa), ale jego prace wydane po 1886 roku nie osiągnęły wcześniejszego poziomu. Cieszył się przychylnością władz uczelni, które z wyrozumiałością traktowały jego kolejne hospitalizacje, umożliwiając mu prowadzenie wykładów, gdy jego stan na to pozwalał, i zatrudniając zastępstwa podczas licznych i długotrwałych nieobecności. W 1917 roku Cantor po raz ostatni trafił do sanatorium, gdzie 6 stycznia 1918 zmarł na atak serca.

Dzieło

Badając szeregi trygonometryczne, Cantor przyjął Weierstrassowską koncepcję liczby niewymiernej jako nieskończonego ciągu jej przybliżeń dziesiętnych. Podejście to wywoływało sprzeciw środowisk matematyków, filozofów, a nawet teologów, bo wymagało zaangażowania tzw. *nieskończoności dokonanej*. Problemu tego można było (przynajmniej częściowo) uniknąć, stosując pojęcie granicy, które opierało się na *nieskończoności potencjalnej*. Dedekind, szczegółowo analizując strukturę zbioru liczb rzeczywistych $\mathbb{R}$, zauważył, że oś liczbowa jest nieskończenie bardziej złożona niż zbiór liczb wymiernych $\mathbb{Q}$. Złożoności tej jednak nie sformalizował. Uczynił to dopiero Cantor w swoim artykule z 1874 opublikowanym w pechowym dlań *Crelle's Journal*. W pracy tej Cantor wprowadził pojęcie równoliczności zbiorów, rozumianej jako istnienie odwzorowania wzajemnie jednoznacznego (czyli bijekcji) jednego zbioru na drugi. Możliwość zdefiniowania odwzorowania wzajemnie jednoznacznego między zbiorem i jego podzbiorem właściwym, uważana przez sławnych poprzedników (np. przez Galileusza) za paradoks, przez Cantora została uznana za immanentną cechę zbiorów nieskończonych. Zbiory równoliczne ze zbiorem liczb naturalnych $\mathbb{N}$ Cantor nazwał przeliczalnymi i udowodnił, że zbiór liczb wymiernych jest przeliczalny. W publikacji z 1891 roku natomiast pokazał ideę *metody przekątniowej*, dzisiaj zwanej *metodą przekątniową Cantora*, którą zastosował w dowodzie nieprzeliczalności $\mathbb{R}$. Oznaczało to ni mniej ni więcej, że istnieją istotnie „różne” nieskończoności: większe i mniejsze. Rozważając zależności między nimi, Cantor najpierw wprowadził liczby porządkowe, a potem kardynalne (moce zbiorów), wraz z całą ich arytmetyką. Nieco później oznaczył liczbę kardynalną zbioru $\mathbb{N}$ hebrajską literą $\aleph_0$ – tego symbolu używamy do dziś.

Z porównania mocy zbiorów $\mathbb{N}$ i $\mathbb{R}$ zrodziło się naturalne pytanie: czy istnieje zbiór, którego moc jest istotnie większa od $\aleph_0$ i istotnie mniejsza od mocy zbioru $\mathbb{R}$, oznaczanej $\mathfrak{c}$ (od continuum). Cantor wierzył, że nie. Dowód tego przypuszczenia, nazwanego hipotezą continuum, był źródłem niekończących się udręk Cantora. Można nawet zauważyć pewną korelację między intensywnością prac nad hipotezą i pobytami autora w szpitalach psychiatrycznych. Hipoteza continuum tak bardzo oddziaływała na umysły matematyków, że David Hilbert przedstawiając w 1900 roku listę najważniejszych nierozwiązanych problemów ówczesnej matematyki, umieścił ją na pierwszym miejscu. Hipoteza continuum doczekała się rozwiązania w 1964 roku. Paul Cohen, bazując na wcześniejszych wynikach Kurta Gödla, wykazał, że hipoteza continuum jest niezależna od pozostałych aksjomatów teorii mnogości.