



Ciągiem Langforda nazywamy każdy taki ciąg długości $2n$, złożony z liczb $1, 1, 2, 2, \dots, n, n$, że dla każdego $1 \leq r \leq n$ pomiędzy wystąpieniami liczby r znajduje się dokładnie r liczb.

Nie ma ciągów Langforda dla $n = 1, 2$. Mając dane $n = 3$, można wskazać tylko jeden (z dokładnością do rewersu) taki ciąg:

2, 3, 1, 2, 1, 3.

Zachęcam do samodzielnego wyznaczenia ciągu Langforda dla $n = 4$. Co ciekawe, nie ma ciągów Langforda dla $n = 5, 6$, ale dla $n = 7$ są – jednym z nich jest

4, 6, 1, 7, 1, 4, 3, 5, 6, 2, 3, 7, 2, 5.

Ustalmy, dla jakich liczb naturalnych n może istnieć ciąg Langforda długości $2n$. Jeżeli w takim ciągu liczba r po raz pierwszy występuje na pozycji a_r , to jej drugie wystąpienie przypada na pozycję $(a_r + r + 1)$. Zauważmy, że wśród liczb postaci a_r i $(a_r + r + 1)$ dla $1 \leq r \leq n$ każda z liczb $1, 2, \dots, 2n$ pojawia się dokładnie raz. Mamy zatem:

$$\sum_{r=1}^n (a_r + a_r + r + 1) = \sum_{i=1}^{2n} i.$$

Powyższe równanie można łatwo przekształcić do postaci:

$$\sum_{r=1}^n a_r = \frac{n(3n-1)}{4},$$

której lewa strona jest liczbą całkowitą – więc prawa też musi mieć tę własność. Wynika stąd, że n jest liczbą podzielną przez 4 lub przy dzieleniu przez 4 daje resztę 3. Oznacza to, że dla tych liczb naturalnych n , których reszta z dzielenia przez 4 wynosi 1 lub 2, nie ma ciągów Langforda długości $2n$.

Co ciekawe, prawdą jest również naturalne uzupełnienie powyższego stwierdzenia: jeżeli n przy dzieleniu przez 4 daje resztę 0 lub 3, to istnieje ciąg Langforda długości $2n$ (uzasadnienie tego faktu wymaga jednak trochę więcej finezji).

Czego zatem jeszcze o ciągach Langforda nie wiemy? Zdaje się, że wraz ze wzrostem odpowiednich wartości n liczba różnych ciągów Langforda długości $2n$ rośnie bardzo szybko, ale nie ma dokładnego (nawet asymptotycznego) opisu tego wzrostu. Dla $n = 7$ istnieje 26 takich ciągów, dla $n = 8$ jest ich 150, a największą dokładną wartością, jaką znamy, jest ta dla $n = 28$, wynosząca nieco ponad półtora tryliarda.



Z lotu ptaka

Każdy kraj ma ptaki, na jakie sobie zasłużył. Brytyjczycy na przykład za swojego ptaka narodowego uznają rudzika. Spora część populacji wyspiarskiej tego niewielkiego ptaka zostaje przez cały rok na wyspach, szczególnie samce, zwłaszcza ostatnio – wraz z ociepleniem klimatu. Te sympatyczne ptaszki swoim żywym śpiewem umilają życie wyspiarzom nawet w ponure zimowe dni. Cóż, moja jesień zaczyna się raczej wzmożonym krakaniem wymieszanym z wyższymi krzykami gigantycznych stad gawronów i kawek. Ciągną o zachodzie słońca na „nocowanki” na starych drzewach w parku, obok którego mieszkam.

Warszawa niepostrzeżenie zmienia jesienią swój zestaw podskakujących krukowatych – dominującą w lecie wronę siwą zastępują gawrony i kawki. To nasi goście z północy, którzy przylecieli wygrzewać się w dużym mieście, gdzie łatwiej o jedzenie.

I tu dochodzimy do kłopotliwej sprawy. Każde dziecko może zadać przecież niewinne pytanie: Dlaczego ptaki odlatują na zimę i skąd wiedzą, dokąd lecieć i jak wrócić? Dorośli zwykle wymigują się odpowiedzią, że tak nakazuje im instynkt (wersja seniorska), albo że tak nakazują im geny (wersja rodzicielska). Niestety, czuję się w obowiązku zmartwić pokolenie Zet. Obecnie obowiązująca wersja prowadzi do fizyki kwantowej.

Przy podróży na dalekie dystanse ptaki używają wielu metod nawigacji. Kierują się położeniem Słońca i gwiazd, zapamiętują ukształtowanie terenu i znaki wskazujące drogę, np. rzeki, łańcuchy górskie, w czym dodatkowo pomaga