

Przygody z kołem od roweru

Alex SCHWARZENBERG-CZERNY*

Kto bawił się kołem rowerowym wyjętym z widelca, wie, że kręcące się koło rowerowe działa jak żyroskop, a przewrócenie go na drugą stronę nie jest prostą operacją i wymaga przyłożenia momentu sił do osi. Powstaje pytanie, jaką pracę trzeba wtedy wykonać? Na pierwszy rzut oka może się wydawać, że skoro efekt jest ten sam jak w przypadku zatrzymania koła i rozpędzenia go w przeciwnym kierunku, to praca wynosi dwukrotną wartość energii kinetycznej w każdym ze stanów, czyli $I_1\Omega^2$, gdzie I_1 to moment bezwładności koła, a Ω to kątowa prędkość obrotu.

Przed wydawaniem osądów warto odwołać się do popularnego pokazu z fizyki (np. youtu.be/dUeLMEGxRW8), podczas którego człowiek siedzący nieruchomo na obracalnym stołku trzyma przed sobą poziomo obracające się koło. Gdy przewróci je na drugą stronę, sam zaczyna się obracać, ale powrót do poprzedniej pozycji zatrzymuje ten obrót. Zachowanie momentu pędu stanowi proste wyjaśnienie tego zjawiska. By uprościć rozważania, przyjmijmy, że moment bezwładności koła I_1 i jego masa M_1 są zaniedbywalnie małe wobec tych stołka i siedzącej osoby $I_2 \gg I_1$ i $M_2 \gg M_1$. Pozwoli nam to w obrocie stołka zaniedbać moment bezwładności koła względem osi stołka. Przyjmijmy też, że czas doświadczenia jest na tyle krótki, że pracę sił tarcia można zaniedbać.

O ile początkowo prędkość kątowa stołka wynosiła $\omega_0 = 0$, a koła $\Omega > 0$, to potem $\omega > 0$ dla stołka i $-\Omega + \omega$ dla koła w zewnętrznym układzie nierotującym. To ostatnie uwzględnia zachowanie bezwzględnej prędkości kątowej koła w układzie stołka przy braku hamowania. Mamy zatem następujący warunek zachowania momentu pędu układu:

$$I_1\Omega + 0 = I_1(-\Omega + \omega) + I_2\omega,$$

skąd otrzymujemy

$$\omega = \frac{2I_1\Omega}{I_1 + I_2} \approx \frac{2I_1}{I_2}\Omega.$$

Pracę W ocenimy w układzie zewnętrznym poprzez zmianę energii kinetycznej stołka od 0 do $(1/2)I_2\omega^2$, czyli

$$W = \frac{1}{2} \frac{I_2 4I_1^2 \Omega^2}{I_2^2} = 2 \frac{I_1^2}{I_2} \Omega^2.$$

Stąd wniosek, że jeśli tylko stołek z eksperymentatorem będzie miał dość duży moment bezwładności, to praca może być dowolnie mała, najlepiej by eksperymentator po prostu stał na Ziemi. Zaraz, zaraz, przecież by przekręcić koło, trzeba się z nim solidnie mocować, to gdzie podziła się ta praca? Nie ma tu paradoksu: jeśli koło wiruje początkowo wokół osi z , to para sił $\mathbf{D}$ konieczna do odwrócenia osi obrotu o 180° względem osi x jest prawie równoległa do osi y , przy czym odstępstwo od równoległości jest tym mniejsze, im większy jest stosunek I_2/I_1 . Oś, wokół której wiruje koło, obraca się w płaszczyźnie xz , a główna składowa siły D_y jest do tej płaszczyzny prostopadła. Nie wykonuje ona więc żadnej pracy, a jedynie pełni rolę więzów utrzymujących oś obrotu koła w płaszczyźnie xz .

W przypadku granicznym, jeśli przyjmijmy, że prędkości są stałe (nie ma przyspieszeń) i znamy moment bezwładności $I_x = I_y = I'$ względem osi x i y , to wartość pary sił D_y można znaleźć na podstawie równań ruchu w układzie nieruchomym względem koła.

Przyjmujemy zatem, że prędkość obrotu osi z względem osi y znika, $\omega_y = 0$, a względem osi x jest w przybliżeniu stała, $\omega_x = \text{const}$ (nie należy jej mylić z ω). Mamy jeszcze $\omega_z = \Omega = \text{const}$. Stosowne równania ruchu to równania Eulera. Ponieważ wszystkie prędkości są stałe, lewe strony tych równań wyrażone przez przyspieszenia kątowe równe są zero. Wypiszemy je tutaj bez żadnego dowodu, dla $\Delta = I_1 - I' > 0$ i pary sił o składowych D_x, D_y, D_z :

$$\begin{aligned} 0 &= -\Delta \omega_y \omega_z + D_x = 0 + D_x && \Rightarrow D_x = 0 \\ 0 &= +\Delta \omega_z \omega_x + D_y = +\Delta \Omega \omega_x + D_y && \Rightarrow D_y = -\Delta \Omega \omega_x \\ 0 &= (I' - I') \omega_x \omega_y + D_z = 0 + D_z && \Rightarrow D_z = 0 \end{aligned}$$

Jeśli momenty bezwładności koła rowerowego przybliżymy przez te dla pierścienia z pręta o masie M i promieniu R , to $I_1 = I_z = MR^2$, a $I' = I_x = I_y = MR^2/2$.

Oczywiście by zacząć przekręcać oś obrotu koła, potrzebne jest pewne niezerowe przyspieszenie, przynajmniej na początku. Wtedy po lewej stronie równania pojawi się niezerowy wyraz i w związku z tym D_x też będzie różne od zera. W praktyce oznacza to, że praca będzie różna od zera, a im szybciej przewracamy koło, tym więcej pracy trzeba wykonać. Jednak jeżeli przekręcamy oś obrotu koła dostatecznie wolno, to możemy to zrobić kosztem dowolnie małej pracy.

