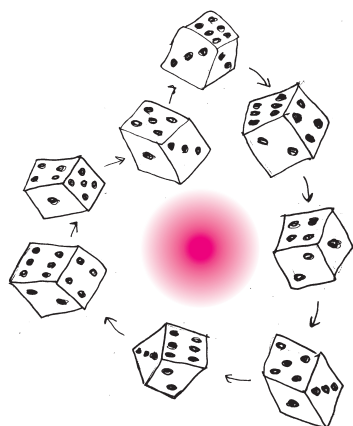


W ogólności, jeżeli mamy co najmniej dwa wymiary przestrzenne, to boosty nie tworzą podgrupy, natomiast boosty wzdłuż tego samego kierunku przestrzennego już tworzą grupę, i to przemienną.



skrótów Lorentza oraz oczywiście dylatacji czasu. Złożenie tych wszystkich efektów daje obrót o kąt ϕ spełniający następujące tożsamości:

$$(1) \quad \operatorname{tg} \phi = \frac{\frac{v_W v_P}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{v_W^2}{c^2}} + \sqrt{1 - \frac{v_P^2}{c^2}}}, \quad \sin \phi = \frac{\frac{v_W v_P}{c^2}}{1 + \sqrt{1 - \frac{v_W^2}{c^2}} \sqrt{1 - \frac{v_P^2}{c^2}}}.$$

Matematycznie sprawa jest dużo prostsza: jak już wspomnieliśmy, obroty tworzą podgrupę grupy Lorentza, natomiast boosty już nie. Wynika stąd, że złożenie dwóch dowolnych boostów wcale nie musi być boostem. Powstaje więc pytanie: czym jest takie złożenie? Odpowiedź jest dość prosta: złożeniem obrotu i boostu, dwóch nietrywialnych cegiełek grupy Lorentza.

A jak to się ma do oryginalnego problemu precesji spinu elektronu? Otóż kluczowy jest ruch po okręgu, który co prawda zachowuje długość wektora prędkości, ale nieustannie zmienia jego kierunek! W związku z tym w każdej chwili czasu naszemu elektronowi trzeba przyporządkować nowy układ współrzędnych (tzw. układ chwilowo współporuszający się), co oznacza, że w każdej chwili czasu potrzebny jest obrót, by uczynić zadość transformacji Lorentza, spójności grupy Lorentza i tym samym szczególnej teorii względności. Dla zaspokojenia ciekawości podajemy ogólny wzór na tę częstość:

$$(2) \quad \vec{\Omega} = \frac{1}{v^2} \left(\frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} - 1 \right) \vec{a} \times \vec{v},$$

gdzie $\vec{a}$ oznacza przyspieszenie, jakiego doznaje ciało. W przypadku elektronu na orbicie $\vec{a}$ jest przyspieszeniem dośrodkowym, wobec czego zachodzi następująca równość:

$$(3) \quad \vec{\Omega} = -\vec{\omega} \left(\frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} - 1 \right),$$

gdzie $\vec{\omega}$ oznacza prędkość kątową elektronu. Z powyższego wzoru wynika również, że precesja spinu odbywa się w kierunku przeciwnym do ruchu obiegowego elektronu. Wracając jeszcze na chwilę do rysunku 6, widzimy, że częstość precesji Thomasa Ω jest dwukrotnie mniejsza niż prędkość kątową elektronu ω , bo w trakcie pełnego obiegu strzałka obróciła się o 180° , co pozwala wyznaczyć prędkość elektronu $v = \frac{\sqrt{5}}{3}c$.

Czytelników spragnionych wyzwań i rachunków zapraszamy do lektury załącznika (umieszczonego na stronie czasopisma), gdzie przedstawione są dokładne rachunki uzasadniające umieszczone w tym artykule rezultaty.



Zadania

Przygotował Dominik BUREK

M 1834. Okrąg podzielono na $2n$ łuków o długości 1. Punkty podziału są połączone w pary, tworząc n cięciw. Każda cięciwa dzieli okrąg na dwa łuki, a długość każdego z nich jest parzysta. Udowodnić, że n jest liczbą parzystą.

M 1835. Punkt na płaszczyźnie nazywamy *kratowym*, jeśli obie jego współrzędne są liczbami całkowitymi. Rozważmy trójkąt o wierzchołkach w punktach kratowych, zawierający we wnętrzu dokładnie dwa punkty kratowe. Udowodnić, że prosta łącząca te dwa punkty kratowe przechodzi przez wierzchołek trójkąta lub jest równoległa do jednego z jego boków.

M 1836. Liczby rzeczywiste $0 < a, b, c, d < 1$ są takie, że

$$abcd = (1 - a)(1 - b)(1 - c)(1 - d).$$

Udowodnić, że

$$(a + b + c + d) - (a + c)(b + d) \geq 1.$$

Rozwiązania na str. 24

Przygotował Andrzej MAJHOFER

F 1131. Samochód napędzany jest silnikiem wysokoprężnym (Diesla), w którym wtrysk paliwa poprzedzony jest 20-krotnym sprężeniem powietrza w cylindrze – tzn. w wyniku sprężania objętość powietrza zassanego z otoczenia (atmosfery) zmniejszona jest do $1/20$ jej wartości początkowej. Jaką temperaturę osiąga powietrze w cylindrze w chwili wtrysku paliwa? Przyjmij, że silnik zasysa powietrze z otoczenia o temperaturze $t = 20^\circ\text{C}$.

F 1132. Gaz doskonały jest poddawany przemianie, w której jego ciśnienie p i objętość V spełniają związek:

$$p^\alpha V = \text{const}; \quad \alpha > 1.$$

Czy podczas rozprężania gazu jego temperatura T rośnie, czy maleje? Jakie jest molowe ciepło przemiany?

Rozwiązania zadań ze strony 4



Rozwiązanie zadania M 1834.

Pokolorujmy $2n$ punktów podziału na przemian dwoma kolorami. Ponieważ dowolna cięciwa dzieli okrąg na dwa parzyste łuki, jej końce muszą mieć ten sam kolor. Ponieważ mamy n końców każdego koloru, n musi być parzyste.



Rozwiązanie zadania M 1835.

W dowodzie wykorzystamy wzór Picka (patrz Δ_{24}^{12}):

Trójkąt o wierzchołkach w punktach kratowych ma pole równe $w + b/2 - 1$, gdzie w i b oznaczają liczby punktów kratowych, odpowiednio, we wnętrzu i na brzegu trójkąta.

Rozważmy trójkąt ABC o wierzchołkach w punktach kratowych, mający w swoim wnętrzu dokładnie dwa punkty kratowe X i Y . Załóżmy, że prosta XY nie przechodzi przez żaden z wierzchołków ABC . Istnieje więc bok trójkąta (niech to będzie BC), którego prosta XY nie przecina. Wówczas trójkąty XBC i YBC mają tyle samo punktów kratowych wewnątrz (tj. nie mają żadnego) oraz na brzegu. Ze wzoru Picka wynika zatem, że pola tych trójkątów są równe. Wobec tego wysokości tych trójkątów opuszczone na prostą BC są równe, a zatem prosta XY jest równoległa do boku BC .



Rozwiązanie zadania M 1836.

Równość z założenia zadania oznacza, że

$$\frac{(1-a)(1-c)}{ac} = \frac{bd}{(1-b)(1-d)}.$$

Wobec tego

$$\begin{aligned} \frac{1-a-c}{ac} &= \frac{(1-a)(1-c)}{ac} - 1 \\ &= \frac{bd}{(1-b)(1-d)} - 1 = \frac{b+d-1}{(1-b)(1-d)}. \end{aligned}$$

Zatem liczby $1-a-c$ oraz $b+d-1$ mają ten sam znak, więc

$$(1-a-c)(b+d-1) \geq 0.$$

Po przekształceniach dostajemy

$$(a+b+c+d) - (a+c)(b+d) \geq 1.$$



Rozwiązanie zadania F 1131.

Sprężanie powietrza w silniku wysokoprężnym jest, w dobrym przybliżeniu, procesem adiabatycznym. Podczas przemiany adiabatycznej gazu doskonałego związek temperatury bezwzględnej gazu T i jego objętości opisuje zależność:

$$TV^{\kappa-1} = \text{const},$$

w której κ jest stosunkiem wartości c_p – molowego ciepła właściwego pod stałym ciśnieniem do c_V – molowego ciepła właściwego w stałej objętości: $\kappa = c_p/c_V$. Powietrze jest mieszaniną gazów dwuatomowych: azotu (N_2) i tlenu (O_2) z bardzo niewielkimi domieszkami innych gazów. Dla gazu dwuatomowego $\kappa = 7/5$. Warunki podane w treści zadania odpowiadają temperaturze początkowej $T_0 = 293$ K i stosunkowi objętości początkowej V_0 do objętości końcowej V_1 równemu $V_0/V_1 = 20$. Mamy:

$$T_0 V_0^{\kappa-1} = T_1 V_1^{\kappa-1}, \quad \text{czyli} \quad T_1 = T_0 \left(\frac{V_0}{V_1} \right)^{\kappa-1}.$$

Liczbowo: $T_1 = 293 \cdot (20)^{0.4} \approx 961$ K $\approx 688^\circ\text{C}$. Samozapłon oleju napędowego następuje w temperaturze około 210°C .

Model użyty w zadaniu jest znacznie uproszczony, na przykład już podczas zasysania powietrze ogrzewa się od rozgrzanych części silnika, ale odpowiada zasadzie działania silnika wysokoprężnego.



Rozwiązanie zadania F 1132.

Równanie stanu jednego mola gazu doskonałego ma postać: $pV = RT$; R oznacza stałą gazową. Oznacza to, że $p = RT/V$. Po podstawieniu tego związku do równania przemiany otrzymujemy, że podczas tej przemiany:

$$\frac{T^\alpha}{V^{\alpha-1}} = \text{const}.$$

Oznaczmy tę stałą jako B , mamy:

$$T^\alpha = BV^{\alpha-1},$$

a więc dla $\alpha > 1$ rozprężaniu gazu (zwiększaniu jego objętości) towarzyszy wzrost temperatury. Do obliczenia ciepła przemiany skorzystamy ze związku ciepła dostarczanego podczas przemiany, dQ_{przem} , ze zmianami energii wewnętrznej gazu, dU , oraz pracą wykonaną przez gaz, $dW = -pdV$:

$$dQ_{\text{przem}} = dU + pdV = c_V dT + pdV,$$

c_V oznacza molowe ciepło w stałej objętości. Otrzymujemy dla molowego ciepła przemiany c_{przem} :

$$c_{\text{przem}} = \frac{dQ_{\text{przem}}}{dT} = c_V + p \frac{dV}{dT}.$$

Pochodną objętości względem temperatury obliczamy na podstawie związku V i T podczas przemiany. Ostatecznie otrzymujemy:

$$c_{\text{przem}} = c_V + \frac{\alpha}{\alpha-1} R.$$



Wielkimi krokami zbliża się kolejna edycja Ogólnopolskiej Matematycznej Konferencji Studentów „OMatKo!!!”. Już po raz dwunasty młodzi pasjonaci matematyki spotkają się, aby wspólnie odkrywać i zgłębiać fascynujący świat nauki. W programie wydarzenia znajdą się liczne wystąpienia, prelekcje, konkursy oraz okazje do integracji – wszystko w atmosferze sprzyjającej wymianie wiedzy i doświadczeń. Tegoroczna edycja odbędzie się na Politechnice Wrocławskiej w dniach 5–7 grudnia 2025 roku.

„OMatKo!!!” to największa w Polsce konferencja studencka poświęcona matematyce, kierowana do studentów i doktorantów z całego kraju. To przestrzeń, w której można zarówno rozwijać swoje zainteresowania, jak i zaprezentować wyniki badań – w formie referatów lub plakatów. Do udziału zapraszamy także koła naukowe, które chcą podzielić się swoimi pasjami i projektami. Konferencja stwarza również świetną okazję do nawiązywania kontaktów, spotkania potencjalnych pracodawców oraz integracji z innymi entuzjastami królowej nauk. To właśnie uczestnicy nadają wydarzeniu jego wyjątkowy charakter.

Aktualne informacje będą publikowane na kanałach społecznościowych konferencji. Zachęcamy do śledzenia:

- strona internetowa: omatko.im.pwr.edu.pl/
- Facebook: [web.facebook.com/omatkopwr/](https://www.facebook.com/omatkopwr/)
- Instagram: www.instagram.com/omatko.pwr/