



Skoro o znaczkach mowa, nie sposób przy tej okazji nie wspomnieć, że pewne małżeństwo matematyków z Krakowa słynie m.in. z bardzo pokażnej kolekcji znaczków pocztowych o tematyce matematycznej.

Artykuł został napisany dość nonszalancko – Baker podał listę wzorów, nie dowodząc ani jednego z nich. W kolekcji znajduje się około trzydziestu wzorów z błędami.

Jedną z najbardziej ludzkich cech jest kolekcjonerstwo. Gromadzenie i porządkowanie przedmiotów może dawać poczucie ładu w – bywa, że dość chaotycznej – codzienności. Ludzie od niepamiętnych czasów kolekcjonują najrozmaitsze rzeczy: od znaczków pocztowych po tropy z wizerunkami świętych.

Amerykański podróżnik i dziennikarz Marcus Baker, jeden z założycieli *National Geographic*, w 1885 roku – kilka lat przed powstaniem tego popularnego czasopisma – zasłynął jako osobliwy kolekcjoner. W prestiżowym *Annals of Mathematics* opublikował dwuczęściowy artykuł pod tytułem *A collection of formulæ for the area of a plane triangle*, zawierający 110 różnych wzorów na pole trójkąta (zliczając je zgodnie z zasadą mówiącą, że pole trójkąta wyrażone przez połowę iloczynu długości boku i opadającej na niego wysokości to jeden wzór, a nie trzy!).

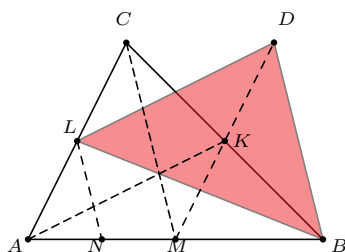
Mimo kilku błędów kolekcja jest bardzo urokliwa. Zaczyna się od trzech wariantów wzoru Herona – wersji z bokami (czyli tej najbardziej znanej), po której zaprezentowano warianty ze środkowymi i z wysokościami. Mamy zatem

$$1. \Delta = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)},$$

gdzie a, b, c są długościami boków, a s oznacza połowę obwodu. Następnie, jeżeli m_a, m_b i m_c to środkowe odpowiednich boków, a σ to połowa ich sumy, to

$$2. \Delta = \frac{4}{3} \sqrt{\sigma(\sigma - m_a)(\sigma - m_b)(\sigma - m_c)}.$$

Poprawność tego wzoru można sprawdzić na przykład poprzez porównanie z polem trójkąta o bokach m_a, m_b i m_c . Istotnie, na rysunku na marginesie punkty K, L i M są środkami odpowiednich boków trójkąta ABC , punkt N to środek odcinka AM , zaś punkt D to odbicie symetryczne punktu M względem K . Boki trójkąta LBD przystają do odpowiednich środkowych trójkąta ABC . Jednocześnie pole LBD jest równe polu NBD , a ono z kolei jest równe $3/4$ pola trójkąta ABC . Uzupełnienie szczegółów tego rozumowania pozostawiam Czytelnikowi.



Trzeci wzór Herona został przez Bakera zapisany w trochę innym stylu:

$$3. \Delta = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c}\right)\left(-\frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c}\right)\left(\frac{1}{h_a} - \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c}\right)\left(\frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} - \frac{1}{h_c}\right)}}.$$

Można go uzasadnić poprzez zastosowanie we wzorze Herona podstawień typu $h_a = \frac{2\Delta}{a}$.

Trzeci wzór w duchu dwóch poprzednich można wyrazić następująco: Jeżeli $\frac{1}{h_a}, \frac{1}{h_b}$ i $\frac{1}{h_c}$ to odwrotności wysokości trójkąta, a $\frac{1}{h}$ to połowa ich sumy, to pole trójkąta wynosi:

$$\Delta = \frac{1}{4\sqrt{\frac{1}{h}\left(\frac{1}{h} - \frac{1}{h_a}\right)\left(\frac{1}{h} - \frac{1}{h_b}\right)\left(\frac{1}{h} - \frac{1}{h_c}\right)}}.$$

Ze względu na ograniczenia przestrzenne Kąta Otwartego pominiemy 106 formuł i przedstawmy ostatni okaz z listy Bakera:

$$110. \Delta = \frac{2R}{r} \cdot N,$$

gdzie r i R to promienie okręgów, odpowiednio, wpisanego i opisanego, oraz N to pole trójkąta, którego wierzchołkami są punkty styczności okręgu wpisanego z bokami trójkąta.

Czytelnika Zaintrygowanego tą opowieścią zachęcam do odnalezienia artykułu Bakera i samodzielnego sprawdzenia, co się kryje między trzecim a sto dziesiątym wzorem w tej osobliwej kolekcji.