



„Mieszkał w Wiśle sum wąsaty,
znakomity matematyk.
Krzychał więc na całe skrzele:
„Do mnie, młodzi przyjaciele!
W dni powszednie i w niedziele
Na życzenie mnożę, dzielę,
Odejmuję i dodaję
I pomyłek nie uznaję!”
Każdy mógł więc przyjść do suma
I zapytać: jaka suma?...”

– Jan Brzechwa, „Sum”

Jaka suma?

Lubimy rekordy. Czekamy na wielkie zawody sportowe, robimy zakłady, czy padnie nowy „naj”. Żądza rekordów jest tak wielka, że te zapisywane w znanej księdze nie raz zadziwiają: największa na świecie zupa, największa liczba gitarzystów grających ulubiony utwór muzyczny, największa liczba schodów pokonanych na głowie...

Zdjęcia dość szczególnego rekordzisty świata obiegły niedawno media. Świat dowiedział się o jego istnieniu, kiedy po półtoragodzinnej walce został wyciągnięty z wody Zalewu Rybnickiego i zmierzony. Gigant, który miał 292 cm, nie czekał się jednak gratulacji, bo tak się przyjęło, że to wędkarz trzymający na haku swoją zdobycz zbiera oklaski.

Ryby nie mają twarzy słodziaków, nie mają mimiki i nie robią wiele dla uciechy człowieka, chyba że jako trofeum. I jak wiadomo, głosu nie mają... Traktujemy je wyłącznie w kategoriach rekreacyjno-konsumpcyjnych. Rybnicki Sum mógł żyć w Zalewie od początku jego powstania w 1971 roku. Wody Zalewu służą do chłodzenia elektrociepłowni, przez co zbiornik ten w ciągu roku długo utrzymuje wysoką temperaturę (obecnie jest trochę lepiej, bo część starych pieców na węgiel została zamknięta). A w cieplej wodzie ryby rosną szybko. Wyobrażam sobie, że złowienie takiego trofeum jest nie lada przeżyciem, ale jednak dziwię mnie pełne ekscytacji gratulacje, mimo że ryba wróciła do wody. Przecież tak wyjątkowe zwierzę zostało wyciągnięte po długiej szarpaninie ze środowiska, obezwładnione, wyciągnięte na brzeg, zmierzone i obfotografowane.

Od kilku lat, szczególnie w okolicach Świąt, słychać głosy, że może czas zmienić nasz stosunek do ryb. Zwłaszcza, że wiele jeszcze o nich nie wiemy, a badania naukowe na ich temat mogą zadziwić nawet akwarystów. Okazuje się na przykład, że ryby potrafią liczyć. Mało tego, potrafią także dodawać i odejmować. Jak w wierszu Jana Brzechwy. Ale jak dogadać się z rybą, żeby wykazała się taką umiejętnością?

Badacze z Instytutu Zoologii Uniwersytetu w Bonn w pracy opublikowanej w 2022 roku użyli metody, którą zastosowano wcześniej do eksperymentów na pszczołach. Badania przeprowadzono na dwóch gatunkach ryb: słodkowodnych płaszczkach płamistych (*Oryzias latipes*) oraz pyszczakach z rodziny pielęgnicowatych (*Tilapia zilli*). W akwariach ustawiono kilka przegród, przez co ryby przepływały do kolejnych „pokoi”. W pierwszym pokoju przedstawiano rybom plansze z określoną liczbą obiektów (np. kółek), w zakresie od 1 do 5. W następnym pokoju ryby miały do wyboru dwa zakątki, w jednym pokazana była plansza z jednym kółkiem więcej, a w drugim z jednym kółkiem mniej niż na planszy z pierwszego pokoju.

Najpierw ryby przechodziły trening. Jeśli ryba widziała na pierwszej planszy kółko niebieskie, miała wykonać dodawanie, zatem wybrać zakątek z planszą prezentującą jedno kółko więcej. Zobaczywszy kółko żółte, ryba miała odejmować, czyli wybrać zakątek z planszą o liczbie kółek o jeden mniejszej. Za dobrze wykonane działanie dostawała nagrodę: coś do zjedzenia.

Po treningu, w czasie którego ryby uczyły się, co znaczy dany kolor, przyszedł czas na testy. Czy ryby potrafią zastosować wytrenowaną umiejętność w innym niż trenowane przypadki? W treningowej wersji celowo nigdy nie użyto planszy z trzema elementami. W zadaniach eksperymentalnych ryby oglądały w pierwszym pokoju

planszę właśnie z trzema kółkami. Okazało się, że zwierzęta stosują wyćwiczone zasady. Co więcej, mając przy dodawaniu dostępnych 4 i 5 elementów, częściej wybierały 4, co oznacza, że były w stanie wykonywać dokładne działania (o jeden więcej), a nie wskazywać planszę po prostu z większą liczbą kółek.

Wiele gatunków zwierząt nawet z odległych ewolucyjnie grup ma pojęcie o liczebności. W przypadku małych liczb (różnie dla różnych zwierząt, zwykle kilka, np. od 1 do 5) mózg zwierząt działa precyzyjnie, rozróżnia każdy element oddzielnie, faktycznie „liczy”. Inny mechanizm pojawia się powyżej tej liczby, kiedy liczenie nazwalibyśmy raczej szacowaniem, przy czym im więcej jest elementów, tym mniejsza „dokładność” szacowania – np. zwierzęta zauważają duże zmiany liczebności obiektów, np. 50 vs. 25, a nie widzą niewielkich zmian, np. 50 vs. 49.

Coraz więcej grup zwierząt wchodzi do matematycznej elity: oczywiście ssaki, w tym nie tylko naczelne, ale także szczury i psy, oraz ptaki (papugi, kruki), płazy i gady, a także nawet bezkręgowce: mrówki i pszczoły. W sumie jednak nie jest to dziwne. Umiejętność liczenia jest potrzebna do przeżycia: przy szacowaniu szansy na bycie zjedzonym (antylopy), przy poszukiwaniu pokarmu, np. policzenie osobników w stadzie, które warto zaatakować (wilki) albo liczenie punktów orientacyjnych w terenie, aby odnaleźć pokarm (pszczoły, mrówki). Ważne też jest orientowanie się, jak liczna jest grupa u zwierząt stadnych (ryby, ptaki, ssaki), a samice potrafią zliczyć, ile młodych mają w miocie (ssaki). Przypuszcza się, że umiejętność liczenia wykształciła się w procesie ewolucji kilkakrotnie.

Sum wąsaty z Wisły w wierszyku nie miał lekko. Trafił mu się złośliwy klient, lin, który dał mu trudne zadanie: „Czy pan zdoła w swym pojęciu odjąć zero od dziesięciu?”. Tego sum nie umiał zrobić. Nie dziwię się, pojęcie zera

jako liczby nawet ludzie zaczęli stosować późno (w Europie dopiero w XIII w.), a dzieci uświadamiają sobie, czym zero jest, dopiero w wieku około 4–5 lat.

Pierwotnym pojęciem, za którym stoi liczba zero, jest brak czegoś, co jest dla wielu zwierząt dostępne. Zwierzęta potrafią jednak więcej. I tak właśnie naukowcy dowodzą, że trenowane w dodawaniu i odejmowaniu pszczoły wiedzą, że zero (brak) jest mniejsze niż 1. U kraków i małp badania aktywności mózgu wykonywane przy zadaniach związanych z liczeniem wykazywały, że konkretne liczby aktywują konkretne neurony w jednym rejonie mózgu. Także liczba zero. Na razie jednak pojmowania zera nie udało się udowodnić u ryb.

Sprawiedliwe podziały grafów

Zbigniew LONC, Paweł RZAŻEWSKI

Każdy, kto ma rodzeństwo, w dzieciństwie doskonale musiał opanować sztukę dzielenia się. Jak *sprawiedliwie* podzielić między siebie kawałek ciasta? Dla uproszczenia sytuacji, załóżmy najpierw, że w podziale uczestniczą dwie osoby: Alicja i Basia. Naturalnym rozwiązaniem, często stosowanym w praktyce, jest metoda „ja kroję, ty wybierasz”. Alicja kroi ciasto na dwa kawałki, zaś Basia wybiera swój kawałek jako pierwsza. Oczywiście w interesie Alicji jest, aby kawałki były możliwie równe, czyli by wartość mniejszego była jak największa. Wtedy jeśli Alicja dostanie kawałek, który jej nie zadowala, może mieć pretensje tylko do siebie.

Co ciekawe, podejście „ja kroję, ty wybierasz” jest znane od bardzo dawna. Już w Biblii, a dokładniej w Księdze Rodzaju, możemy znaleźć fragment o tym, jak Abram i Lot podzielili między siebie Ziemię Obiecana, aby uniknąć konfliktów:

„Kraj nie mógł utrzymać ich obu, bo zbyt liczne mieli trzody; musieli więc się rozłączyć. A gdy wynikła sprzeczka, (...) rzekł Abram do Lota: *Niechaj nie będzie sporu między nami, (...) bo przecież jesteśmy krewni. Wszak cały ten kraj stoi przed tobą otworem. Odłącz się ode mnie! Jeżeli pójdiesz w lewo, ja pójdę w prawo, a jeżeli ty pójdiesz w prawo, ja – w lewo.* (...) Lot wybrał sobie zatem całą tę dolinę Jordanu i wyruszył ku wschodowi, i tak rozłączyli się obaj. Abram pozostał w ziemi Kanaan, Lot zaś zamieszkał w owej okolicy”. [Rdz 13, 6–12] (cytat z *Biblii Tysiąclecia*).

Co jednak zrobić, jeśli w podziale uczestniczy więcej osób? Pytanie to w pierwszej połowie XX wieku zadał Hugo Steinhaus swoim studentom, Stefanowi Banachowi i Bronisławowi Knasterowi. Dało to początek tak zwanej teorii sprawiedliwych podziałów, która jest dziś bogatą dziedziną, leżącą na styku matematyki, informatyki i ekonomii.

U Brzechwy wszystko kończy się dobrze, jak to w bajce. Choć sum, nie mogąc sprostać zadaniu, schudł ze stresu, zmienił się w małą rybkę, „opuścił wody słodkie i za żonę pojął szprotkę”. Sum z Zalewu Rybnickiego być może posiadał sztukę dodawania zera, skoro urósł prawie do 3 metrów.

Marta FIKUS-KRYŃSKA

“Cichlids and stingrays can add and subtract ‘one’ in the number space from one to five”, Schluessel i wsp., *Scientific reports* 12 (2022)

“Numerical ordering of zero in honey bees”, Howard i wsp., *Science* 360 (2018)

“Behavioral and Neuronal Representation of Numerosity Zero in the Crow”, Kirschhock i wsp., *J. Neurosci* 41 (2021)

Wydział Matematyki i Nauk Informatycznych, Politechnika Warszawska

Dobra podzielne i niepodzielne

Problem dzielenia ciasta jest stosunkowo łatwy, gdyż ciasto ma następującą przyjemną cechę (poza innymi oczywistymi zaletami): można je podzielić/przekroić w dowolnym miejscu. My zajmujemy się problemem trudniejszym, gdy musimy rozdzielić dobra *niepodzielne*. Wyobraźmy sobie, że drużyna poszukiwaczy przygód, po pokonaniu smoka, odkryła jego skarb, który składa się z wielu cennych przedmiotów. Każdy przedmiot sam w sobie jest niepodzielny, czyli jedna osoba powinna go wziąć w całości. Dodatkowo każdy z uczestników wyprawy inaczej ceni poszczególne przedmioty: magiczny łuk ma niewielką wartość dla krasnoluda, ale elfi tropiciel będzie nim zdecydowanie zainteresowany. Inne przykładowe scenariusze, gdzie mamy do czynienia z podziałem zbioru niepodzielnych dóbr, to podział majątku po rozwodzie lub podział spadku.

Ciekawy przykład ścisłego podejścia do sprawiedliwego podziału spadku został zilustrowany w książce *Cryptonomicon* Neala Stephensona, którą Czytelnikom polecamy.

Formalnie dany mamy pewien zbiór przedmiotów V oraz n osób, zwanych zwyczajowo *agentami*. Ponadto dla każdego agenta dana jest jego *funkcja użyteczności*, która każdemu przedmiotowi przypisuje pewną nieujemną wartość. Funkcję użyteczności i -tego agenta będziemy oznaczać przez u_i .

Niech $\mathcal{P}_n(V)$ będzie rodziną wszystkich podziałów zbioru V pomiędzy n agentów; nie zakładamy tutaj, że zbiory w tym podziale muszą być niepuste. Każdy taki podział jest zatem ciągiem $(P_1, \dots, P_n)$, gdzie P_i jest podzbiorem V , który dostanie agent numer i . W tym artykule będziemy zakładać, że każda funkcja u_i jest *addytywna*, czyli wartością zbioru $S \subseteq V$, ozn. $u_i(S)$, jest suma wartości jego elementów, czyli $\sum_{v \in S} u_i(v)$. Przy tym założeniu wartość uzyskana przez i -tego agenta w podziale $(P_1, \dots, P_n) \in \mathcal{P}_n(V)$ wynosi $\sum_{v \in P_i} u_i(v)$. Zwróćmy uwagę, że założenie o addytywności nie zawsze jest spełnione w rzeczywistych sytuacjach.