



Nierówność Muirheada

Bartłomiej BZDEGA

Uniwersytet im. A. Mickiewicza w Poznaniu

Tym razem o jednej z nierównościowych „armat” – nierówności Muirheada. Niektóre używane tu pojęcia i oznaczenia są zaczerpnięte z poprzedniego kącika, więc zachęcam Czytelnika do spojrzenia tam w pierwszej kolejności. Odcinek częściowo bazuje na pracy licencjackiej, którą w 2016 roku pod moją opieką napisał Marek Milwicz, a także na artykule *On uses and applications of Muirhead's Inequality* (*Parabola* 58(3), 2022), w którym można znaleźć jeszcze więcej zadań z nierównością Muirheada w roli głównej.

Rozważmy zbiór wszystkich n -wyrazowych nierosnących ciągów liczb całkowitych nieujemnych o sumie wyrazów równej s – oznaczamy go przez $\mathcal{P}(n, s)$. Na tym zbiorze określamy porządek $\preceq$ w następujący sposób:

$$(a) \preceq (b) \iff \sum_{i=1}^k a_i \leq \sum_{i=1}^k b_i \text{ dla } k = 1, 2, \dots, n-1.$$

Ze względu na przynależność obu ciągów do $\mathcal{P}(n, s)$ zachodzi jeszcze równość $a_1 + a_2 + \dots + a_n = b_1 + b_2 + \dots + b_n$, która często jest dodawana do definicji tego porządku. W powyższej sytuacji mówimy, że ciąg (b) *majoryzuje* ciąg (a) . Jeśli dodatkowo $(a) \neq (b)$, to wówczas piszemy $(a) \prec (b)$ (ciąg (b) *ściśle majoryzuje* ciąg (a)). Ponadto jeżeli $(a) \prec (b)$ oraz nie istnieje ciąg (c) , który by spełniał

warunek $(a) \prec (c) \prec (b)$, to mówimy, że ciąg (b) *majoryzuje* ciąg (a) *bezpośrednio*, co oznaczamy $(a) \triangleleft (b)$.

Z rysunku poniżej, z lewej strony, ilustrującego ten porządek dla zbioru $\mathcal{P}(3, 8)$, można wyczytać między innymi, że: $(5, 3, 0) \prec (7, 1, 0)$ oraz $(4, 3, 1) \triangleleft (4, 4, 0)$. Natomiast żaden z ciągów, $(4, 4, 0)$ ani $(6, 1, 1)$, nie majoryzuje drugiego – dlatego mamy tu tylko częściowy porządek. Nadeszła pora na:

Nierówność Muirheada. Niech $(a), (b) \in \mathcal{P}(n, s)$ oraz $(a) \preceq (b)$. Wówczas

$$W_{a_1, a_2, \dots, a_n}(x_1, x_2, \dots, x_n) \leq W_{b_1, b_2, \dots, b_n}(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

dla wszystkich $x_1, x_2, \dots, x_n > 0$.

Cudowny dowód tego twierdzenia nie mieści się niestety w ciasnym kąciku, więc jedynie streszczę go w kilku krokach. Odtworzenie pełnego dowodu Czytelnik może potraktować jako ćwiczenie duchowe. Zakładamy, że $(a), (b) \in \mathcal{P}(n, s)$ dla ustalonych $n \geq 2$ i $s > 0$.

(1) Dla $(a) \preceq (b)$ istnieją ciągi $(c)^{(1)}, (c)^{(2)}, \dots, (c)^{(k)}$ spełniające warunek: $(a) = (c)^{(1)} \triangleleft (c)^{(2)} \triangleleft \dots \triangleleft (c)^{(k)} = (b)$, więc wystarczy ograniczyć dowód do $(a) \triangleleft (b)$.

(2) Jeśli $(a) \neq (b)$, to $a_i \neq b_i$ oraz $a_j \neq b_j$ dla pewnych $i \neq j$ (czyli ciągi (a) i (b) różnią się w co najmniej dwóch miejscach). Jeżeli $(a) \triangleleft (b)$, to ciągi (a) , (b) różnią się w dokładnie dwóch miejscach.

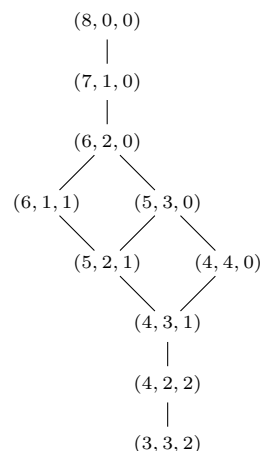
(3) Dla liczb rzeczywistych $x, y > 0$ oraz liczb całkowitych dodatnich $p \geq q$ zachodzi nierówność $x^p y^q + x^q y^p \leq x^{p+1} y^{q-1} + x^{q-1} y^{p+1}$. Teraz wystarczy skorzystać z ostatniej części punktu (2).

Nierówność Muirheada łatwo uogólnić na wykładniki całkowite, a nawet wymierne. W tym celu wystarczy zauważyć, że dodanie tej samej stałej do wszystkich wyrazów ciągów nie wpłynie na hierarchię między nimi, a tylko zmieni zbiór $\mathcal{P}$, w którym je porównujemy. Podobnie jest z mnożeniem wszystkich wyrazów ciągów przez jakąś stałą. Jeśli mamy nierówność z wykładnikami całkowitymi, z których najmniejszym jest $w < 0$, to wystarczy obustronnie pomnożyć nierówność przez $(x_1 x_2 \dots x_n)^{-w}$. Jeśli wykładniki nie są całkowite, ale są wymierne, to wystarczy dokonać podstawienia $x_i = (x'_i)^W$, w którym W oznacza najmniejszą wspólną wielokrotność mianowników wszystkich wykładników w wyjściowej nierówności.

Zadania

Uwaga. Wszystkie poniższe nierówności należy wykazać dla $x, y, z > 0$.

- $(y+z)(z+x)(x+y) \geq 8xyz$.
- $x+y+z \leq \frac{yz}{x} + \frac{zx}{y} + \frac{xy}{z}$.
- $\frac{x}{y+z} + \frac{y}{z+x} + \frac{z}{x+y} \geq \frac{3}{2}$ (nierówność Nesbitta).
- $\frac{x^3}{yz} + \frac{y^3}{xz} + \frac{z^3}{xy} \geq 3 \cdot \frac{x^3+y^3+z^3}{x^2+y^2+z^2}$.
- Nierówności między średnimi: harmoniczną, geometryczną, arytmetyczną i kwadratową dla zmiennych $x_1, x_2, \dots, x_n > 0$.
- $\frac{y^4+z^4}{yz(y^3+z^3)} + \frac{z^4+x^4}{zx(z^3+x^3)} + \frac{x^4+y^4}{xy(x^3+y^3)} \geq 1$, przy założeniu $xyz = yz + zx + xy$ (57 OM).
- $\frac{1}{x^3(y+z)} + \frac{1}{y^3(z+x)} + \frac{1}{z^3(x+y)} \geq \frac{3}{2}$, przy założeniu $xyz = 1$ (IMO 1995).
- Czy którakolwiek z nierówności: $[5 \ 2 \ 1] \geq [4 \ 4 \ 0]$ lub przeciwna, jest prawdziwa dla wszystkich $x, y, z > 0$?



Wskazówki do zadań

- Po wymnożeniu nawiasów i uporządkowaniu otrzymamy $12x^2y + 12xy^2 + 12x^2z + 12xz^2 + 12y^2z + 12yz^2 \geq 24xyz$.
- Po pomnożeniu stronami przez xyz i zrobieniu porządku dostaniemy $xy^2z + x^2yz + xy^2z + x^2yz + xy^2z + x^2yz \geq 24xyz$.
- Po obustronnym pomnożeniu przez $x^2y^2z^2$ dostaniemy $x^5 + y^5 + z^5 \geq x^4y + x^4z + y^4x + y^4z + z^4x + z^4y$.
- Mozna przekształcić do $6x^5 + 6y^5 + 6z^5 \geq 6x^4y + 6x^4z + 6y^4x + 6y^4z + 6z^4x + 6z^4y$.
- Postępowanie jest standardowe, tylko wykładniki są niecałkowite, ale tym się nie trzeba przejmować.
- Ujednostyniamy nierówność, mnożąc lewą stronę przez xyz , a prawą przez $yz + zx + xy$. Potem można sprawdzić nierówność do $[7 \ 4 \ 0] \geq [6 \ 4 \ 1]$.
- Jeśli spełniony jest warunek $xyz = 1$, to dla dowolnej stałej t mamy $[a_1 \ a_2 \ a_3] = [a_1 - t \ a_2 - t \ a_3 - t] + [t \ t \ t]$. Nierówność sprawada się do $[4 \ 4 \ 0] + [2 \ 3 \ 1] \geq [3 \ 3 \ 2] + [4 \ 4 \ 3]$. Teraz wystarczy zauważyć, że $[5 \ 3 \ 0] \geq [4 \ 4 \ 3]$ i $[4 \ 4 \ 3] \geq [3 \ 3 \ 2]$.
- Zadana.