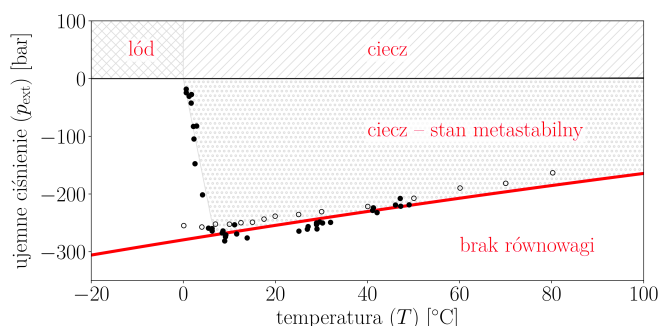




Rys. 5. Ekstremalne ujemne ciśnienia, przy których woda pozostaje w metastabilnym stanie ciekłym. Porównanie doświadczeń (wirówka – pełne punkty [4], kavitacja akustyczna – puste punkty [5]) z teorią, z dopasowanym $N = 730$

otrzymujemy realistyczne wartości ciśnienia krytycznego w temperaturach powyżej 10°C . Porównanie doświadczeń z dopasowaną teorią przedstawiamy na rysunku 5. Widać na nim zmodyfikowaną wersję diagramu fazowego (jak na rys. 3), tym razem jednak uwzględniamy „historię” układu – zaczynamy od stanu ciekłego.

Przedstawiony tutaj rachunek zakłada, że bąbelkę dużo szybciej zmienia objętość niż liczbę cząstek, co nie zawsze jest prawdą. Pełniejsza analiza tej sytuacji wymaga odpowiedzi na pytanie o wiele skal czasowych: parowania, transportu ciepła, relaksacji mechanicznej bąbelka. Czytelników poszukujących

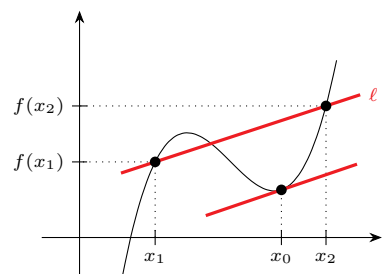
dogłębnych odpowiedzi (i kolejnych trudnych problemów) zapraszamy do lektury prac [3] oraz [1]. Ciekła woda okazuje się tak stabilna, że jeśli problemem byłoby tylko pompowanie do góry, najwyższe drzewo mogłoby mieć wysokość nawet 2 km. Wartość ciśnienia krytycznego, mogłoby się wydawać, nie ma w takim razie konsekwencji dla biologii – jednak w przypadku mangrowców takie ogromne ujemne ciśnienia są potrzebne do wciągania wody bez soli korzeniami zanurzonymi w morzu (odwrócona osmoza), ale to już zupełnie inna historia.

Literatura

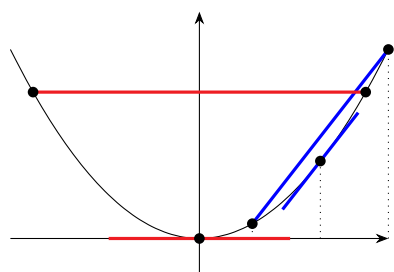
- [1] M. E. M. Azouzi i in. “A coherent picture of water at extreme negative pressure”. *Nature Physics* 9.1 (2013), s. 38–41.
- [2] C. Beach i F. McMurry. *The New Student's Reference Work for Teachers, Students and Families*. F.E. Compton, The New Student's Reference Work for Teachers, Students and Families t. 1, 1919.
- [3] M. Blander i J. Katz. “Bubble nucleation in liquids”. *AIChE Journal* 21 (1979), s. 833–848.
- [4] L. J. Briggs. “Limiting Negative Pressure of Water”. *Journal of Applied Physics* 21.7 (1950), s. 721–722.
- [5] E. Herbert, S. Balibar i F. Caupin. “Cavitation pressure in water”. *Physical Review E* 74 (2006).
- [6] V. Magni. *Demonstratio ocularis: loci sine locato, corporis successive moti in vacuo, luminis nulli corpori inhaerentis*. Benacci, Vittorio, 1648.
- [7] P. F. Scholander i in. “Sap Pressure in Vascular Plants”. *Science* 148.3668 (1965), s. 339–346.
- [8] S. C. Sillett i R. Van Pelt. “A redwood tree whose crown is a forest canopy”. *Northwest Science* 74.1 (2000), s. 34–43.

O pewnej konkurencji, w której parabola nie ma równych sobie

* Katedra Matematyki i Informatyki,
Uniwersytet Jana Długosza
w Częstochowie



Rys. 1. Sieczna ℓ poprowadzona przez punkty $(x_1, f(x_1))$ i $(x_2, f(x_2))$ oraz poprowadzona przez $(x_0, f(x_0))$ styczna równoległa do ℓ (nie jedyna!)



Rys. 2. Wykres funkcji $f(x) = x^2$, jego dwie sieczne i odpowiadające im styczne. W obu przypadkach punkt $x_0 = \frac{x_1+x_2}{2}$ zadaje jedyną możliwą styczną

Katarzyna DOMAŃSKA*

Czy dla każdej siecznej do wykresu da się znaleźć równoległą do niej styczną? Lub bardziej precyzyjnie, czy mając daną funkcję f i sieczną ℓ poprowadzoną przez punkty o odciętych $x_1 < x_2$, można tak dobrać punkt $x_0 \in (x_1, x_2)$, żeby styczna do wykresu funkcji f w $(x_0, f(x_0))$ była równoległa do ℓ ?

Sieczną ℓ , o której tu mowa, jest prosta nachylona do osi Ox układu współrzędnych pod kątem, którego tangens – jak łatwo dostrzec – jest równy ilorazowi $\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$. Tangens kąta nachylenia stycznej w $(x_0, f(x_0))$ jest zadany przez pochodną: $f'(x_0)$. Pytanie o prostą styczną równoległą do ℓ jest więc pytaniem o istnienie $x_0 \in (x_1, x_2)$ o własności

$$f'(x_0) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}.$$

Jak powszechnie wiadomo, odpowiedź na powyższe pytanie (dla funkcji f różniczkowalnej w danym przedziale) przynosi klasyczne twierdzenie Lagrange’a o wartości średniej. Odpowiedź jest pozytywna. Trzeba tylko nadmienić, że szukana styczna nie musi być jedyna, a teza twierdzenia nie daje nam jawnego wzoru na punkt x_0 , którego istnienie jest ową tezę zapewnione.

Twierdzenie Lagrange’a dla trójmianów. Łatwo sprawdzić, że specyficznie zachowuje się pod tym względem funkcja określona trójmianem kwadratowym. Istotnie, rozważając funkcję $f: [x_1, x_2] \rightarrow \mathbb{R}$ określoną wzorem $f(x) = ax^2 + bx + c$, mamy

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{a(x_2^2 - x_1^2) + b(x_2 - x_1)}{x_2 - x_1} = a(x_2 + x_1) + b \quad \text{oraz} \quad f'(x) = 2ax + b,$$

dla wszelkich $x \in (x_1, x_2)$. Pozwala to zauważyć, że punktem x_0 „realizującym” (dodajmy, że w przypadku $a \neq 0$ jedynym) poszukiwaną styczną, równoległą do prostej ℓ przechodzącej przez punkty $(x_1, f(x_1))$ oraz $(x_2, f(x_2))$, jest średnia arytmetyczna liczb x_1 i x_2 . Przykładu może tu dostarczyć funkcja przyporządkowująca argumentowi x wartość x^2 (por. rys. 2).



Redukcja rozważań do przypadku $f(0) = f'(0) = 0$ jest wygodna, ale nie jest konieczna – zachęcam Czytelnika do przekonania się, jak dalsze rozumowanie przebiega bez tej redukcji.

A w drugą stronę? Naturalnym wydaje się pytanie, dla jakich jeszcze funkcji zachodzi taka prawidłowość, że szukaną styczną równoległą do zadanej siecznej jest ta, która za odciętą punktu styczności ma średnią arytmetyczną odciętych punktów, przez które poprowadzono sieczną.

Okazuje się, że tylko trójmiany mają tę właściwość. Dokładniej, w klasie funkcji różniczkowalnych $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ równanie

$$(E) \quad \frac{f(x) - f(y)}{x - y} = f'\left(\frac{x + y}{2}\right) \quad \text{dla } x, y \in \mathbb{R}, x \neq y$$

spełniają jedynie wielomiany stopnia co najwyżej 2.

Nie jest trudno to udowodnić. Wiemy już, że równanie (E) jest spełnione przez trójmiany kwadratowe, można więc bez straty ogólności przyjąć, że $f(0) = 0$ oraz $f'(0) = 0$ (w przeciwnym przypadku odjęlibyśmy od f funkcję liniową $f(0) + xf'(0)$). Podstawiając $y = 0$ w równaniu (E), otrzymuje się

$$\frac{f(x) - f(0)}{x} = f'(x/2) \quad \text{dla } x \neq 0,$$

co dzięki założeniu $f(0) = 0$ oznacza równość

$$f(x) = xf'(x/2) \quad \text{dla wszystkich } x \in \mathbb{R}.$$

Podstawienie jej do (E) prowadzi do:

$$\frac{xf'(x/2) - yf'(y/2)}{x - y} = f'\left(\frac{x + y}{2}\right).$$

Dla uproszczenia zapisu rozważmy pomocniczo funkcję $G(x) := f'(x/2)$. Zgodnie z założeniem mamy $G(0) = 0$, a równanie wyżej daje nam

$$(E1) \quad xG(x) - yG(y) = (x - y)G(x + y) \quad \text{dla } x, y \in \mathbb{R}.$$

Podstawiając $y = -x$, uzyskuje się, że funkcja G jest nieparzysta. Teraz wystarczy w równaniu (E1) w miejsce y przyjąć $-y$, żeby po wykorzystaniu nieparzystości otrzymać

$$(E2) \quad xG(x) - yG(y) = (x + y)G(x - y) \quad \text{dla } x, y \in \mathbb{R}.$$

Równania (E1) i (E2) prowadzą do:

$$(x - y)G(x + y) = (x + y)G(x - y) \quad \text{dla } x, y \in \mathbb{R}.$$

Zauważmy, że wartości $s = x + y$ oraz $t = x - y$ możemy wybrać dowolnie (biorąc $x = \frac{s+t}{2}$ i $y = \frac{s-t}{2}$), a więc $tG(s) = sG(t)$ dla wszystkich $s, t \in \mathbb{R}$, co oznacza, że $G(x)/x$ jest funkcją stałą.

Dowiedliśmy w ten sposób, że dla pewnej stałej $a \in \mathbb{R}$ zachodzi tożsamość $G(x) = ax$. Zgodnie z definicją G oznacza to $f'(x) = 2ax$, co w połączeniu z warunkiem $f(0) = 0$ daje $f(x) = ax^2$, a więc trójmian kwadratowy.

Co dalej? Nieco więcej trudu kosztuje uzyskanie opisu rozwiązań równania

$$\frac{f(x) - g(y)}{x - y} = h(x + y) \quad \text{dla } x, y \in \mathbb{R}, x \neq y.$$

Zadanie jest dużo ogólniejsze, ale jego rozwiązanie wymaga tylko nieco więcej trudu i jest bardzo podobne do rozwiązania równania (E). Okazuje się, że jeśli funkcje $f, g, h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ spełniają powyższe równanie, to istnieją takie liczby $a, b, c \in \mathbb{R}$, że

$$f(x) = ax^2 + bx + c = g(x) \quad \text{oraz} \quad h(x) = ax + b.$$

W uzyskaniu opisu rozwiązań powyższego równania kluczowym jest uzyskać równość $f(x) = g(x)$ dla $x \neq 0$. W tym celu zauważmy, że

$$\begin{aligned} \frac{f(x) - g(y)}{x - y} &= h(x + y) = h(y + x) \\ &= \frac{f(y) - g(x)}{y - x} \quad \text{dla } x \neq y, \end{aligned}$$

co w konsekwencji daje

$$f(x) - g(x) = g(y) - f(y) \quad \text{dla } x \neq y.$$

Podstawiając za (x, y) pary $(z_1, z_2), (z_2, z_3), (z_3, z_1)$, otrzymujemy równość $f(x) = g(x)$ dla wszystkich x . Do rozwiązania pozostaje równanie

$$\frac{f(x) - f(y)}{x - y} = h(x + y) \quad \text{dla } x, y \in \mathbb{R}, y \neq 0, x \neq y,$$

które rozwiązujemy... tak jak poprzednio! Okazuje się, że powiązanie prawej strony równania z pochodną funkcji f nie było w rozumowaniu konieczne i nadal jesteśmy w stanie otrzymać wzór określający funkcje f i h .