

jako liczby nawet ludzie zaczęli stosować późno (w Europie dopiero w XIII w.), a dzieci uświadamiają sobie, czym zero jest, dopiero w wieku około 4–5 lat.

Pierwotnym pojęciem, za którym stoi liczba zero, jest brak czegoś, co jest dla wielu zwierząt dostępne. Zwierzęta potrafią jednak więcej. I tak właśnie naukowcy dowodzą, że trenowane w dodawaniu i odejmowaniu pszczoły wiedzą, że zero (brak) jest mniejsze niż 1. U kruków i małp badania aktywności mózgu wykonywane przy zadaniach związanych z liczeniem wykazywały, że konkretne liczby aktywują konkretne neurony w jednym rejonie mózgu. Także liczba zero. Na razie jednak pojmowania zera nie udało się udowodnić u ryb.

Sprawiedliwe podziały grafów

Zbigniew LONC, Paweł RZAŻEWSKI

Każdy, kto ma rodzeństwo, w dzieciństwie doskonale musiał opanować sztukę dzielenia się. Jak *sprawiedliwie* podzielić między siebie kawałek ciasta? Dla uproszczenia sytuacji, załóżmy najpierw, że w podziale uczestniczą dwie osoby: Alicja i Basia. Naturalnym rozwiązaniem, często stosowanym w praktyce, jest metoda „ja kroję, ty wybierasz”. Alicja kroi ciasto na dwa kawałki, zaś Basia wybiera swój kawałek jako pierwsza. Oczywiście w interesie Alicji jest, aby kawałki były możliwie równe, czyli by wartość mniejszego była jak największa. Wtedy jeśli Alicja dostanie kawałek, który jej nie zadowala, może mieć pretensje tylko do siebie.

Co ciekawe, podejście „ja kroję, ty wybierasz” jest znane od bardzo dawna. Już w Biblii, a dokładniej w Księdze Rodzaju, możemy znaleźć fragment o tym, jak Abram i Lot podzielnili między siebie Ziemię Obiecana, aby uniknąć konfliktów:

„Kraj nie mógł utrzymać ich obu, bo zbyt liczne mieli trzody; musieli więc się rozłączyć. A gdy wynikła sprzeczka, (...) rzekł Abram do Lota: *Niechaj nie będzie sporu między nami, (...) bo przecież jesteśmy krewni. Wszak cały ten kraj stoi przed tobą otworem. Odłącz się ode mnie! Jeżeli pójdiesz w lewo, ja pójdę w prawo, a jeżeli ty pójdiesz w prawo, ja – w lewo.* (...) Lot wybrał sobie zatem całą tę dolinę Jordanu i wyruszył ku wschodowi, i tak rozłączyli się obaj. Abram pozostał w ziemi Kanaan, Lot zaś zamieszkał w owej okolicy”. [Rdz 13, 6–12] (cytat z *Biblii Tysiąclecia*).

Co jednak zrobić, jeśli w podziale uczestniczy więcej osób? Pytanie to w pierwszej połowie XX wieku zadał Hugo Steinhaus swoim studentom, Stefanowi Banachowi i Bronisławowi Knasterowi. Dało to początek tak zwanej teorii sprawiedliwych podziałów, która jest dziś bogatą dziedziną, leżącą na styku matematyki, informatyki i ekonomii.

U Brzechwy wszystko kończy się dobrze, jak to w bajce. Choć sum, nie mogąc sprostac zadaniu, schudł ze stresu, zmienił się w małą rybkę, „opuścił wody słodkie i za żonę pojął szprotkę”. Sum z Zalewu Rybnickiego być może posiadał sztukę dodawania zera, skoro urósł prawie do 3 metrów.

Marta FIKUS-KRYŃSKA

“Cichlids and stingrays can add and subtract ‘one’ in the number space from one to five”, Schluessel i wsp., *Scientific reports* 12 (2022)

“Numerical ordering of zero in honey bees”, Howard i wsp., *Science* 360 (2018)

“Behavioral and Neuronal Representation of Numerosity Zero in the Crow”, Kirschhock i wsp., *J. Neurosci* 41 (2021)

Wydział Matematyki i Nauk Informatycznych, Politechnika Warszawska

Dobra podzielne i niepodzielne

Problem dzielenia ciasta jest stosunkowo łatwy, gdyż ciasto ma następującą przyjemną cechę (poza innymi oczywistymi zaletami): można je podzielić/przekroić w dowolnym miejscu. My zajmujemy się problemem trudniejszym, gdy musimy rozdzielić dobra *niepodzielne*. Wyobraźmy sobie, że drużyna poszukiwaczy przygód, po pokonaniu smoka, odkryła jego skarb, który składa się z wielu cennych przedmiotów. Każdy przedmiot sam w sobie jest niepodzielny, czyli jedna osoba powinna go wziąć w całości. Dodatkowo każdy z uczestników wyprawy inaczej ceni poszczególne przedmioty: magiczny huk ma niewielką wartość dla krasnoluda, ale elfi tropiciel będzie nim zdecydowanie zainteresowany. Inne przykładowe scenariusze, gdzie mamy do czynienia z podziałem zbioru niepodzielnych dóbr, to podział majątku po rozwodzie lub podział spadku.

Ciekawy przykład ścisłego podejścia do sprawiedliwego podziału spadku został zilustrowany w książce *Cryptonomicon* Neala Stephensona, którą Czytelnikom polecamy.

Formalnie dany mamy pewien zbiór przedmiotów V oraz n osób, zwanych zwyczajowo *agentami*. Ponadto dla każdego agenta dana jest jego *funkcja użyteczności*, która każdemu przedmiotowi przypisuje pewną nieujemną wartość. Funkcję użyteczności i -tego agenta będziemy oznaczać przez u_i .

Niech $\mathcal{P}_n(V)$ będzie rodziną wszystkich podziałów zbioru V pomiędzy n agentów; nie zakładamy tutaj, że zbiory w tym podziale muszą być niepuste. Każdy taki podział jest zatem ciągiem $(P_1, \dots, P_n)$, gdzie P_i jest podzbiorem V , który dostanie agent numer i . W tym artykule będziemy zakładać, że każda funkcja u_i jest *addytywna*, czyli wartością zbioru $S \subseteq V$, ozn. $u_i(S)$, jest suma wartości jego elementów, czyli $\sum_{v \in S} u_i(v)$. Przy tym założeniu wartość uzyskana przez i -tego agenta w podziale $(P_1, \dots, P_n) \in \mathcal{P}_n(V)$ wynosi $\sum_{v \in P_i} u_i(v)$. Zwróćmy uwagę, że założenie o addytywności nie zawsze jest spełnione w rzeczywistych sytuacjach.

Naszym celem jest znalezienie takiego podziału, aby każdy agent był zadowolony z wartości uzyskanych przedmiotów. Inaczej mówiąc, znalezienie podziału, który jest *sprawiedliwy*.

Co to jest „sprawiedliwy podział”?

Najbardziej naturalnym kryterium sprawiedliwości jest *proporcjonalność*: i -ty agent chciałby uzyskać przedmioty o łącznej wartości co najmniej $u_i(V)/n$. Nietrudno jednak przekonać się, że proporcjonalne podziały nie zawsze istnieją. Na przykład: jeśli jeden przedmiot istotnie przewyższa wartością pozostałe, może go dostać tylko jeden agent, a pozostali odejdą w poczuciu krzywdy. Badano więc wiele innych, mniej restrykcyjnych, definicji sprawiedliwego podziału, w nadziei na znalezienie takiej, która z jednej strony odzwierciedli intuicyjne poczucie sprawiedliwości, zaś z drugiej strony, zagwarantuje istnienie rozwiązania.

W niniejszym artykule zajmujemy się stosunkowo nowym kryterium sprawiedliwości zaproponowanym przez Budisha [3] w 2011 roku, które bardziej pasuje do podziałów zbioru niepodzielnych dóbr. Nazwijmy je *kryterium maksymimalnego udziału*. Dalej będziemy je nazywać w skrócie kryterium *mms*.

Skrót mms pochodzi od angielskiej nazwy tego kryterium: maximin share.

Najpierw każdy agent przeprowadza następujący eksperyment myślowy: co by było, gdybyśmy mieli podzielić się zgodnie z metodą „ja kroję, ty wybierasz?”. Zatem każdy agent rozważa wszystkie podziały V na n części i wybiera taki, gdzie wartość najgorszej części (według jego funkcji użyteczności) jest jak największa. Wartość ta będzie oznaczana przez mms_i , gdzie i jest numerem agenta. Formalnie mamy więc

$$mms_i = \max_{(P_1, \dots, P_n) \in \mathcal{P}_n(V)} \min_{j \in \{1, \dots, n\}} u_i(P_j).$$

Podział, który realizuje maksimum w wyrażeniu powyżej, nazywamy *mms-podziałem* dla agenta i . Podział, gdzie dla każdego i agent i -ty uzyskuje przedmioty o łącznej wartości co najmniej mms_i , będziemy uznawać za *sprawiedliwy*. Formalnie podział $(P_1, \dots, P_n)$ jest *mms-sprawiedliwy*, jeśli dla każdego i zachodzi nierówność $u_i(P_i) \geq mms_i$.

Intuicyjnie każdy agent realistycznie (czy też pesymistycznie) ocenia to, na co może liczyć, zatem można spodziewać się, że tak niewygórowane oczekiwania uda się zaspokoić.

Zwróćmy uwagę, że każdy agent, obliczając swoją wartość mms_i , przyjmuje pesymistyczny scenariusz, że każdy inny agent ceni wszystkie przedmioty tak jak on sam. Może się więc okazać, że istnieją podziały, w których każdy agent dostaje zbiór o wartości znacznie przewyższającej jego oczekiwania. Ekstremalnym przykładem jest sytuacja z dwoma agentami i dwoma przedmiotami a i b , gdzie agent 1 przypisuje wartość 1 przedmiotowi a i 0 przedmiotowi b , natomiast agent 2 odwrotnie – wartość 1 przedmiotowi b i 0 przedmiotowi a . W takim przypadku wartość parametru mms_i wynosi 0 dla obu agentów, a każdy z nich może otrzymać przedmiot o wartości 1.

Zauważmy też, że jeśli $(P_1, \dots, P_n)$ jest *mms-podziałem* dla i -tego agenta, to

$$u_i(V) = \sum_{j=1}^n u_i(P_j) \geq \sum_{j=1}^n mms_i = n \cdot mms_i,$$

czyli w szczególności $mms_i \leq u_i(V)/n$.

Istnienie mms-sprawiedliwych podziałów

Czy tak zdefiniowane sprawiedliwe podziały zawsze istnieją? Odpowiedź na to pytanie nie jest oczywista, o czym świadczy fakt, że znalezienie tej odpowiedzi zajęło aż 3 lata od momentu zaproponowania kryterium *mms*. Zanim tę odpowiedź zaprezentujemy, pokażmy dwie proste obserwacje.

Po pierwsze, jeśli w podziale występuje $n = 2$ agentów, *mms-sprawiedliwy* podział zawsze istnieje. Istotnie, rozważmy następujący protokół postępowania. Pierwszy agent prezentuje swój *mms-podział* (P_1, P_2) . Drugi agent wybiera zbiór P_j ($j \in \{1, 2\}$) o większej wartości według funkcji u_2 (lub dowolny zbiór, jeśli wartości obu zbiorów są równe). Zauważmy, że wartość ta wyniesie co najmniej $u_2(V)/2 \geq mms_2$, zatem drugi agent będzie zadowolony z uzyskanych przedmiotów. Pierwszy agent bierze zbiór, który pozostał – zauważmy, że on także będzie zadowolony, gdyż wartość jego zbioru wynosi co najmniej $\min_{j \in \{1, 2\}} u_1(P_j) = mms_1$.

Powyższą obserwację można nieco uogólnić na sytuację, kiedy agentów jest dowolnie wielu, ale wszyscy, z wyjątkiem być może jednego (powiedzmy pierwszego), mają tę samą funkcję użyteczności i , co za tym idzie, ten sam *mms-podział* $(P_1, \dots, P_n)$. Agent pierwszy wybiera ten zbiór P_j , który maksymalizuje wartość $u_1(P_j)$, zaś każdy z pozostałych agentów bierze jeden z pozostałych $n - 1$ zbiorów (każdy agent inny zbiór). Analogicznie do poprzedniego przypadku nietrudno zweryfikować, że przy takim podziale każdy z agentów odejdzie zadowolony.

Problem rozstrzygnięcia, czy *mms-sprawiedliwe* podziały dla więcej niż dwóch agentów zawsze istnieją, okazał się znacznie trudniejszy. Ostatecznie sprawdziła się tu maksyma wypowiedziana przez Noę Alona (w kontekście innej hipotezy, która wydawała się oczywista, a okazała się nieprawdziwa: hipotezy Hedetniemięgo): *czasami powodem, że coś jest bardzo trudne do pokazania, jest to, że jest to nieprawda*. Pierwszy przykład zbioru dóbr i funkcji użyteczności, dla których nie istnieje *mms-sprawiedliwy* podział, został skontrowany przez Kurokawę, Procaccia i Wanga [5]. Poniżej zaprezentujemy uproszczoną konstrukcję podaną przez Feigego, Sapira i Taubera [4]. Rozważmy zbiór przedmiotów $V = \{1, \dots, 9\}$ i trzech agentów z następującymi funkcjami użyteczności.

agent \ przedmiot	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	26	23	19	16	12	10	9	4	1
2	26	22	20	16	13	9	9	4	1
3	25	23	20	15	13	10	9	4	1

Zauważmy, że $u_1(V) = u_2(V) = u_3(V) = 120$. Rozważmy następujące trzy podziały zbioru V na trzy podzbiory:

$$\mathcal{P}_1 = (\{1, 6, 8\}, \{2, 4, 9\}, \{3, 5, 7\}),$$

$$\mathcal{P}_2 = (\{1, 5, 9\}, \{2, 6, 7\}, \{3, 4, 8\}),$$

$$\mathcal{P}_3 = (\{1, 4\}, \{2, 5, 8\}, \{3, 6, 7, 9\}).$$

Pomocna przy ich analizie może być tabelka, gdzie w wierszu odpowiadającym podziałowi $\mathcal{P}_i$ przedstawione są wagi przedmiotów dla i -tego agenta.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$\mathcal{P}_1$	26	23	19	16	12	10	9	4	1
$\mathcal{P}_2$	26	22	20	16	13	9	9	4	1
$\mathcal{P}_3$	25	23	20	15	13	10	9	4	1

Zauważmy, że dla każdego i każdy zbiór w podziale $\mathcal{P}_i$ ma dla i -tego agenta wartość 40. Ponieważ jest to dokładnie jedna trzecia wartości całego zbioru V , podział $\mathcal{P}_i$ jest mms-podziałem dla i -tego agenta, czyli $\text{mms}_i = 40$. Jednakże nietrudna, choć dość żmudna, analiza przypadków pozwala przekonać się, że w każdym podziale $(P_1, P_2, P_3) \in \mathcal{P}_3(V)$ istnieje i , dla którego $u_i(P_i) \leq 39$. Pokazuje to, że nie da się podzielić zbioru V w taki sposób, aby każdy z trzech agentów był zadowolony.

Powyższa konstrukcja pokazuje, że nie w każdej sytuacji mms-sprawiedliwy podział istnieje. Rozważmy jednak podział $\mathcal{P} = (P_1, P_2, P_3)$, w którym

$$P_1 = \{1, 5, 9\}, \quad P_2 = \{2, 6, 7\}, \quad P_3 = \{3, 4, 8\}.$$

Pomocna może okazać się poniższa tabelka (w i -tym wierszu pokazane są odpowiednie wartości funkcji u_i).

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
P_1	26				12				1
P_2		22				9	9		
P_3			20	15				4	

W tym podziale mamy $u_1(P_1) = u_3(P_3) = 39$ i $u_2(P_2) = 40$. Zatem pierwszy i trzeci agent, choć nie są w pełni zadowoleni, uzyskali *prawie* tyle, na ile liczyl. Czy można coś ciekawego powiedzieć o istnieniu takich *prawie* mms-sprawiedliwych podziałów? Wróćmy do tej myśli później, a tymczasem zmieńmy nieco temat.

Podziały grafów

W dotychczas analizowanym przez nas problemie nie występowały żadne związki między przedmiotami ze zbioru V , i dowolny zbiór przedmiotów był akceptowany przez agentów, o ile tylko miał dla nich odpowiednio dużą wartość. W praktycznych sytuacjach związki pomiędzy dobrami często mają znaczenie. Przykładem może być następujący problem pojawiający się w rolnictwie. Przez wiele pokoleń rolnicy dzielili swoje pola na coraz mniejsze kawałki między swoje, często bardzo liczne, potomstwo. W wyniku tego procesu, po latach, pola zostały podzielone na bardzo dużo bardzo małych kawałków, a poszczególni właściciele posiadają gospodarstwa złożone z wielu małych, często odległych od siebie poletek. Taka sytuacja nie sprzyja oczywiście racjonalnej gospodarce rolnej. W związku

z tym dokonuje się ponownego podziału ziemi pomiędzy dotychczasowych właścicieli, czyli tzw. *komasacji*.

Dla rolników istotna jest nie tylko wartość pól, które w wyniku tego podziału otrzymują, ale również to, aby każdy z nich miał pole w jednym kawałku.

Zalóżmy więc, że zbiór dzielonych przedmiotów V jest zbiorem wierzchołków pewnego spójnego grafu G . Każdy z agentów ma funkcję użyteczności przypisującą wartości poszczególnym przedmiotom (dokładnie tak jak wcześniej). Teraz jednak każdy agent chciałby, aby otrzymane przez niego przedmioty tworzyły *spójny* podgraf grafu G . Wartość mms_i jest też zdefiniowana względem podziałów V na n spójnych części.

Zdefiniujmy ten problem formalnie. Mamy dany graf G o zbiorze wierzchołków V oraz dla każdego $i \in \{1, \dots, n\}$ addytywną funkcję użyteczności $u_i : V \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$. Przez $\mathcal{P}_n(G)$ oznaczmy rodzinę wszystkich uporządkowanych podziałów V , w których każdy zbiór podziału indukuje spójny podgraf G . Dla każdego i definiujemy:

$$\text{mms}_i = \max_{(P_1, \dots, P_n) \in \mathcal{P}_n(G)} \min_{j \in \{1, \dots, n\}} u_i(P_j).$$

Znowu: mms_i oznacza minimalną łączną wartość przedmiotów, po otrzymaniu których agent numer i będzie zadowolony. Podział $(P_1, \dots, P_n) \in \mathcal{P}_n(G)$ nazywamy *mms-sprawiedliwym podziałem grafu G* , jeśli każdy agent jest zadowolony, czyli dla każdego i zachodzi $u_i(P_i) \geq \text{mms}_i$. Problem rozważany w poprzedniej sekcji jest więc szczególnym przypadkiem aktualnego, gdy G jest grafem pełnym. Nietrudno też zweryfikować, że w aktualnie rozważanym wariancie nadal działa argumentacja dowodząca istnienia mms-sprawiedliwego podziału w sytuacji, gdy wszyscy agenci, z wyjątkiem być może jednego, mają identyczną funkcję użyteczności. Prowadzi nas to do pytania: Dla jakich grafów G możemy zagwarantować istnienie mms-sprawiedliwego podziału, niezależnie od liczby agentów i ich funkcji użyteczności?

Drzewa. Okazuje się, że przykładem rodziny grafów o takiej własności są drzewa, co zostało udowodnione przez Bouvereta i in. [2]. Naszkicujemy ten dowód, ale najpierw wprowadźmy oznaczenia. Niech T będzie drzewem o zbiorze wierzchołków V i rozważmy n agentów z funkcjami użyteczności $u_i : V \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$, dla $i \in \{1, \dots, n\}$. Wybierzmy dowolny wierzchołek $r \in V$, będziemy traktować go jako korzeń. Definiuje to dla każdej pary sąsiadujących wierzchołków relację rodzic–dziecko. Dla $w \in V$ przez V_w oznaczać będziemy podzbiór V składający się z wierzchołka w i wszystkich jego potomków w drzewie T . Zauważmy, że zbiór V_w indukuje poddrzewo T ukorzenione w w , czyli w szczególności spójny podgraf T . Co więcej, graf uzyskany z T przez usunięcie wierzchołków z V_w jest spójny (dokładniej, jest drzewem).

Dowód istnienia mms-sprawiedliwego podziału jest indukcyjny po n . Jeśli $n = 1$, czyli jest tylko jeden agent, sytuacja jest jasna: zgarnia on cały zbiór V .

Niech więc $n \geq 2$ i przypuśćmy, że każde drzewo ma mms-sprawiedliwy podział dla $n - 1$ agentów.

Zainicjujmy $w = r$. Następnie dla $i = 1, 2, \dots$ agent i -ty sprawdza, czy $u_i(V_w) \geq \text{mms}_i$. Jeśli nie, nic się nie dzieje i przechodzimy do kolejnego agenta. W przeciwnym przypadku agent i -ty wskazuje wierzchołek $w' \in V_w$ o następujących własnościach:

1. $u_i(V_{w'}) \geq \text{mms}_i$ oraz
2. spośród wszystkich wierzchołków spełniających pierwszą własność w' leży w drzewie T najniżej, czyli w największej odległości od korzenia (remisy rozstrzygamy dowolnie).

Wierzchołek w' zastępuje wierzchołek w i przechodzimy do kolejnego agenta.

Zauważmy, że w ciągu tej procedury na pewno któryś agent coś wskaże, bo w szczególności każdy byłby (bardzo) zadowolony, gdyby dostał zbiór $V_r = V$, rozpatrywany w pierwszym kroku. Teraz rozważmy wierzchołek zapisany jako w po ostatniej iteracji i niech i będzie numerem agenta, który go wskazał.

Agent i dostaje zbiór V_w , a dla pozostałych $n - 1$ agentów i drzewa indukowanego przez $V \setminus V_w$ otrzymujemy podział z założenia indukcyjnego. Dlaczego ten podział zbioru V jest mms-sprawiedliwy? Agent i na pewno będzie zadowolony, bo sam tak zadeklarował, wskazując wierzchołek w . Z drugiej strony dla każdego $j \neq i$ zbiór V_w jest zawarty w jednym z bloków mms-podziału agenta j (dlaczego?). Oznacza to, że agent j w swoim mms-podziale liczy się z utratą zbioru V_w (a nawet jego nadzbioru). Nietrudno pokazać, że wynika z tego, że dla każdego agenta $j \neq i$ najgorszy zbiór w jego mms-podziale drzewa indukowanego przez $V \setminus V_w$ między $n - 1$ agentów ma wartość co najmniej mms_j (gdzie wartość ta policzona jest dla całego zbioru V i n agentów). Zatem zbiór, przyznany mu w wywołaniu indukcyjnym, spełni jego oczekiwania.

Cykle. Zachęcenie sukcesem w przypadku drzew spójrzmy na inne grafy o prostej strukturze. Naturalnym pierwszym kandydatem są cykle. Okazuje się jednak, że w tym wypadku mms-sprawiedliwe podziały mogą nie istnieć. Zaprezentujemy konstrukcję Bouvereta i in. [2]. Tym razem mamy osiem przedmiotów ułożonych w cykl zgodnie z naturalnym porządkiem. Agentów jest czworo, przy czym funkcje użyteczności agentów 1 i 2 są równe, podobnie agentów 3 i 4. Zauważmy, że funkcje te są „cyklicznie przesunięte” względem siebie.

agent \ przedmiot	1	2	3	4	5	6	7	8
1 i 2	1	4	4	1	3	2	2	3
3 i 4	4	4	1	3	2	2	3	1

Rozważmy dwa podziały zbioru przedmiotów na cztery spójne bloki, przedstawione poniżej:

podział	1	2	3	4	5	6	7	8
$\mathcal{P}_1$	1	4	4	1	3	2	2	3
$\mathcal{P}_2$	4	4	1	3	2	2	3	1

Zauważmy, że w podziale $\mathcal{P}_1$ każdy agent dostaje jedną czwartą łącznej wartości wszystkich przedmiotów według funkcji użyteczności $u_1 = u_2$, a w podziale $\mathcal{P}_2$ każdy agent dostaje jedną czwartą łącznej wartości wszystkich przedmiotów według funkcji użyteczności $u_3 = u_4$. Zatem podział $\mathcal{P}_1$ jest mms-podziałem dla agentów 1 i 2, a podział $\mathcal{P}_2$ jest mms-podziałem dla agentów 3 i 4. Dla każdego i wartość mms_i wynosi więc 5.

Przypuśćmy, że w rozważanym przypadku istnieje mms-sprawiedliwy podział $\mathcal{P}$. W podziale tym każdy agent powinien dostać przedmioty, którym przypisuje wartość co najmniej 5. Skoro wartość każdego przedmiotu nie przekracza 4, w podziale $\mathcal{P}$ każdy agent dostaje co najmniej dwa (czyli dokładnie dwa) przedmioty. Zatem $\mathcal{P}$ jest albo podziałem $\mathcal{P}_1$, albo podziałem $\mathcal{P}_2$. Jest to sprzeczność, gdyż podział $\mathcal{P}_1$ nie jest zadowalający dla jednego spośród agentów 3 i 4, a podział $\mathcal{P}_2$ nie jest zadowalający dla jednego spośród agentów 1 i 2.

Zwróćmy uwagę, że konstrukcja dla cyklu nie oznacza, że jeśli graf G zawiera cykl o ośmiu wierzchołkach, to nie istnieje dla niego mms-sprawiedliwy podział. Co prawda, ustawiając wartości funkcji użyteczności dla wierzchołków spoza cyklu na 0, możemy zasygnalizować, że nie mają one wartości dla żadnego z agentów, ale te dodatkowe wierzchołki (i krawędzie) tworzą nowe połączenia, przez co rodzina rozważanych podziałów wierzchołków cyklu może być większa.

Co dalej?

Wspomnieliśmy wcześniej, że w zaprezentowanym przykładzie, gdzie nie istnieje mms-sprawiedliwy podział (dla grafu pełnego), każdy agent i otrzymuje przedmioty o sumarycznej wartości *prawie* równej swojej wartości mms_i . Prowadzi to do następującego wariantu problemu. Niech $\mathcal{G}$ będzie rodziną grafów. Wyznacz największą stałą $\alpha_{\mathcal{G}} \in [0, 1]$ (zależną tylko od $\mathcal{G}$), dla której prawdziwe jest następujące stwierdzenie: Jeśli przedmioty są wierzchołkami grafu z rodziny $\mathcal{G}$, to niezależnie od liczby agentów i ich funkcji użyteczności istnieje podział gwarantujący każdemu agentowi i przedmioty, którym przypisuje on łączną wartość co najmniej $\alpha_{\mathcal{G}} \cdot \text{mms}_i$. Zaprezentowana wcześniej konstrukcja pokazuje, że jeśli $\mathcal{G}$ jest rodziną grafów pełnych, to $\alpha_{\mathcal{G}} \leq \frac{39}{40}$. Okazuje się, że w tym samym przypadku mamy $\alpha_{\mathcal{G}} \geq \frac{3}{4} + \frac{3}{3836}$, co pokazali Akrami i Garg [1]. Tylko dla niewielu spośród innych klas grafów znane są podobne oszacowania.

Literatura

- [1] Akrami, H., & Garg, J. (2024). „Breaking the 3/4 barrier for approximate maximin share”. W Proceedings of the 2024 Annual ACM-SIAM Symposium on Discrete Algorithms, SODA 2024, str. 74–91.
- [2] Bouveret, S., Cechlárová, K., Elkind, E., Igarashi, A., & Peters, D. (2017). „Fair division of a graph”. W Proceedings of the 26th International Joint Conference on Artificial Intelligence, IJCAI 2017, str. 135–141.
- [3] Budish, E. (2011). „The combinatorial assignment problem: Approximate competitive equilibrium from equal incomes”. *Journal of Political Economy*, 119(6), str. 1061–1103.
- [4] Feige, U., Sapir, A., & Tauber, L. (2022). „A tight negative example for mms fair allocations”. W Proceedings of 17th International Conference, WINE 2021, str. 355–372.
- [5] Kurokawa, D., Procaccia, A. D., & Wang, J. (2018). „Fair enough: Guaranteeing approximate maximin shares”. *Journal of the ACM*, 65(2), str. 1–27.