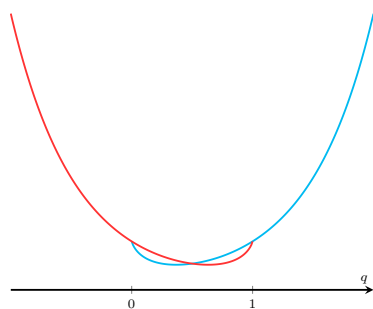




Porównanie funkcji q^q oraz $(1-q)^{1-q}$

Powyższe równanie możemy przekształcić w następujący sposób:

$$\begin{aligned}(1-q) \ln(1-q) - q \ln q &= 0, \\ \ln((1-q)^{1-q}) - \ln(q^q) &= 0, \\ \ln\left(\frac{(1-q)^{1-q}}{q^q}\right) &= 0, \\ \frac{(1-q)^{1-q}}{q^q} &= 1, \\ (1-q)^{1-q} &= q^q.\end{aligned}$$

Ponieważ funkcje q^q oraz $(1-q)^{1-q}$ są symetryczne względem punktu $\frac{1}{2}$, otrzymujemy $q = \frac{1}{2}$, czyli $e^{-\frac{nk}{m}} = \frac{1}{2}$, co oznacza, że $p(k)' = 0$ dla $k = \frac{m}{n} \ln 2$.

Co więcej, Czytelnik łatwo uzasadni widoczny na rysunku fakt, że dla $0 < q < \frac{1}{2}$ mamy $q^q < (1-q)^{1-q}$, zaś dla $\frac{1}{2} < q < 1$ zachodzi $q^q > (1-q)^{1-q}$. Oznacza to, że dla $q < \frac{1}{2}$ (czyli $k > \frac{m}{n} \ln 2$) mamy $p(k)' > 0$ i podobnie dla $k < \frac{m}{n} \ln 2$ mamy $p(k)' < 0$. Stąd wnioskujemy, że dla $k = \frac{m}{n} \ln 2$ funkcja p osiąga swoje minimum.

Ponieważ jesteśmy w stanie uzależnić optymalną liczbę funkcji skrótu k od $\frac{m}{n}$, nic nie stoi na przeszkodzie, aby obliczyć, jakiego rozmiaru tablicy potrzebujemy do przechowania n elementów z zadaniem prawdopodobieństwem odpowiedzi fałszywie pozytywnej p :

$$\begin{aligned}p &= \left(1 - e^{-n \frac{m}{n} \ln 2}\right)^{\frac{m}{n} \ln 2} = 2^{-\frac{m}{n} \ln 2}, \\ m &= \frac{n}{\ln 2} \log_{\frac{1}{2}} p.\end{aligned}$$

Dla naszego przykładu, w którym Facebook sprawdza loginy $n = 3 \times 10^9$ użytkowników, jeśli chcemy uzyskać $p = 0,001$, to potrzebujemy zaledwie $k = 10$ funkcji oraz raptem $m \approx 5\text{GB}$ danych.

Jak widać na powyższym przykładzie, filtr Blooma pozwala znacząco zmniejszyć zużycie danych oraz utrzymać stały czas odpowiedzi, o ile jesteśmy w stanie zaakceptować pewien margines błędu.



Zadania

Przygotował Dominik BUREK

M 1837. W kwadracie $\mathcal{K}$ dany jest wielokąt wypukły $\mathcal{P}$ o tej własności, że niezależnie od tego, jak dwie kopie $\mathcal{P}$ umieścimy w $\mathcal{K}$, zawsze mają one wspólny punkt. Udowodnić, że dowolne trzy kopie $\mathcal{P}$ umieszczone w $\mathcal{K}$ mają również wspólny punkt.

M 1838. Dana jest liczba całkowita $n > 0$ oraz liczby rzeczywiste $a_1, a_2, \dots, a_n$. Udowodnić, że istnieją takie liczby naturalne $m, k \in \{1, 2, \dots, n\}$, że

$$\left| \sum_{i=1}^m a_i - \sum_{i=m+1}^n a_i \right| \leq |a_k|.$$

M 1839. Niech $\omega(n)$ oznacza liczbę różnych dzielników pierwszych n . Dane są liczby całkowite dodatnie a, b, c . Udowodnić, że istnieje liczba całkowita dodatnia n taka, że $\omega(an + c) \geq \omega(bn + c)$.

Przygotował Andrzej MAJHOFER

F 1133. Jakie czynniki decydują o wartości prędkości u , z jaką gazy są wyrzucane z dyszy pracującego silnika rakietowego? Oszacuj wartość tej prędkości.

F 1134. Jaka część początkowej masy rakiety, m_0 , musi stanowić paliwo, żeby startując w przestrzeni kosmicznej z dala od źródeł pola grawitacyjnego (gwiazd i planet), raketa osiągnęła prędkość równą I prędkości kosmicznej, tj. $v_1 \approx 8 \text{ km/s}$, jeżeli prędkość wyrzucanych gazów $u = 4 \text{ km/s}$?

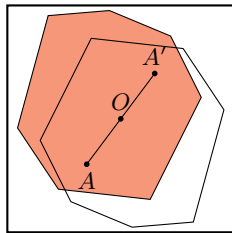


Rozwiązania na str. 24

Rozwiązania zadań ze strony 3



Rozwiązanie zadania M 1837.



Niech $\mathcal{R}$ będzie dowolną kopią $\mathcal{P}$ umieszczoną w kwadracie $\mathcal{K}$. Rozważmy figurę $\mathcal{R}'$ będącą obrazem figury wypukłej $\mathcal{R}$ przy symetrii względem środka O kwadratu. Wówczas $\mathcal{R}'$ znajduje się wewnątrz $\mathcal{K}$ oraz zgodnie z założeniem $\mathcal{R}$ i $\mathcal{R}'$ mają punkt wspólny A . Obraz A' punktu A przy symetrii względem O również znajduje się w przecięciu wielokątów $\mathcal{R}$ i $\mathcal{R}'$. Ponieważ punkt O leży na odcinku łączącym dwa punkty należące do wielokąta wypukłego $\mathcal{R}$, sam też do niego należy. Pokazaliśmy, że dowolna kopia wielokąta $\mathcal{P}$ umieszczona w kwadracie $\mathcal{K}$ zawiera punkt O , skąd w prosty sposób wynika teza.



Rozwiązanie zadania M 1838.

Niech dla $m = 1, 2, \dots, n-1$

$$S_m := \sum_{i=1}^m a_i - \sum_{i=m+1}^n a_i$$

i przyjmijmy $S_n = -S_0 = \sum_{i=1}^n a_i$. Wtedy

$$S_m - 2a_m = S_{m-1}.$$

Rozpatrzmy ciąg

$$S_n, S_{n-1}, \dots, S_1, S_0.$$

Bez straty ogólności możemy założyć, że $S_n > 0$. Wówczas $S_0 < 0$, możemy zatem znaleźć takie $i \geq 1$, że $S_i \geq 0 \geq S_{i-1}$.

Przypuśćmy, że $S_i = |S_i| > |a_i|$ i $-S_{i-1} = |S_{i-1}| > |a_i|$. Ponieważ $S_i - 2a_i = S_{i-1}$, to $-S_i + 2a_i > |a_i|$, więc $2a_i > S_i + |a_i| > 2|a_i|$, co jest niemożliwe.



Rozwiązanie zadania M 1839.

Założmy przeciwnie, czyli

$$\omega(an + c) < \omega(bn + c).$$

dla dowolnej liczby całkowitej $n > 0$. Dla ustalonej liczby całkowitej $k > 0$, w powyższej nierówności, podstawiając za n liczby

$$a^{k-1}, a^{k-2}b, a^{k-3}b^2, \dots, ab^{k-2}, b^{k-1},$$

dostajemy ciąg nierówności

$$\omega(a^k + c) < \omega(a^{k-1}b + c) < \dots < \omega(b^k + c).$$

Wynika stąd, że $\omega(b^k + c) \geq k + 1$. Ponieważ iloczyn $k + 1$ liczb pierwszych jest większy niż $k!$, więc

$$k! < b^k + c < b^k + c^k < (b + c)^k.$$

Jednakże

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[k]{k!} = +\infty \quad (\text{sprawdź to!}),$$

więc $\sqrt[k]{k!}$ dla dużych k przekracza $b + c$ – sprzeczność.



Rozwiązanie zadania F 1133.

W komorze silnika raketowego następuje bardzo gwałtowne spalanie paliwa. Gazowe produkty tego spalania wypływają z dużą prędkością przez dyszę silnika. Prędkość u , z jaką wylatują z dyszy, odpowiada w przybliżeniu średniej prędkości cząsteczek gazu – produktu spalania – o temperaturze T panującej w komorze silnika. Na podstawie twierdzenia o ekwipartycji energii znamy średnią energię kinetyczną cząsteczek gazu:

$$\frac{1}{2}mu^2 = \frac{3}{2}kT.$$

W powyższym wzorze m oznacza masę cząsteczki, a k stałą Boltzmanna. Otrzymujemy oszacowanie:

$$u = \sqrt{\frac{3kT}{m}} = \sqrt{\frac{3RT}{\mu}}.$$

W ostatniej równości R oznacza uniwersalną stałą gazową, $R = 8,3145 \text{ J/(mol}\cdot\text{K)}$, a μ molową masę produktów spalania. Wynika stąd, że produkty spalania powinny być jak „najlżejsze” (o małej wartości μ), a temperatura T w komorze spalania powinna być jak najwyższa. Maksymalna wartość temperatury ograniczana jest przez wytrzymałość ścianek silnika – zwykle niewielkie kilka tysięcy kelwinów. W silniku RS-25 napędzającym promy kosmiczne (Space-Shuttle) paliwem jest mieszanina ciekłego tlenu (O_2) i wodoru (H_2). Produktem spalania jest woda (H_2O) o molowej masie $\mu = 18 \text{ g}$. W komorze silnika (poza atmosferą) osiągnięta jest temperatura około 3250 K. Według naszego oszacowania $u \approx 2,1 \text{ km/s}$. W rzeczywistości osiągnięta prędkość gazów to około 4,4 km/s. Różnica wynika głównie z przemian stanu gazu zachodzących w odpowiednio ukształtowanej dyszy silnika (tzw. dyszy Laval) podczas wypływu gazu zwiększających uzyskiwaną prędkość.



Rozwiązanie zadania F 1134.

Zgodnie z tzw. wzorem Ciołkowskiego prędkość rakiety o masie początkowej m_0 wzrasta o Δv , zgodnie ze wzorem:

$$\Delta v = u \ln \left(\frac{m_0}{m_f} \right),$$

w którym u oznacza prędkość gazów wyrzucanych przez silnik, a m_f masę końcową rakiety. Oznacza to, że po osiągnięciu I prędkości kosmicznej, $\Delta v = v_1$, masa rakiety m_f będzie wynosiła:

$$m_f = m_0 \exp \left(-\frac{v_1}{u} \right).$$

Stosunek masy zużytego paliwa $m_0 - m_f$ do masy początkowej m_0 wyniesie więc:

$$\frac{m_0 - m_f}{m_0} = 1 - \exp \left(-\frac{v_1}{u} \right).$$

Liczbowo, dla danych z treści zadania, stosunek masy paliwa do początkowej masy rakiety $(m_0 - m_f)/m_0 \approx 0,865$. Podczas startu z powierzchni Ziemi, ze względu na konieczność pokonania przyciągania ziemskiego i oporu powietrza, stosunek ten byłby jeszcze bliższy jedności.