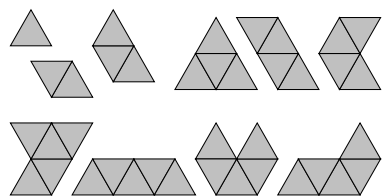


dla którego wypchany prostokąt o obwodzie $2k$ ma pole co najmniej n .

Prostokąt ograniczający figury realizującej minimalny obwód dla danego pola nie musi być wypchany. Ważne, że istnieje wśród nich (figur minimalizujących...) choć jedna o tej własności.

Niech k będzie największą liczbą całkowitą spełniającą $k^2 < n$. Wtedy albo n kafelków mieści się w prostokącie $k \times (k+1)$, albo dopiero w kwadracie $(k+1) \times (k+1)$. Pierwszy przypadek oznacza, że $k^2 < n \leq k^2 + k$, co po pomnożeniu przez 4 daje $4k^2 < 4n \leq 4k^2 + 4k$. Jeśli z prawej strony dodamy 1, to nierówność będzie zachowana, a zyskamy możliwość zwinięcia do kwadratu: $(2k)^2 < 4n \leq (2k+1)^2$, czyli $2k < \sqrt{4n} \leq 2k+1$. To oznacza ni mniej, ni więcej, tylko $\lceil 2\sqrt{n} \rceil = 2k+1$. Drugi przypadek jest analogiczny. Wiedząc, że $k^2 + k < n \leq (k+1)^2$, ponownie mnożymy przez 4 i otrzymujemy, że $(2k+1)^2 < 4n \leq (2k+2)^2$. Dodając 1 do $4k^2 + 4k$, pozornie straciliśmy siłą nierówność, ale zauważmy, że $(2k+1)^2$ jest liczbą nieparzystą, czyli równość jednak nie może wystąpić. Po spierwiastkowaniu otrzymujemy $\lceil 2\sqrt{n} \rceil = 2k+2$. W obu przypadkach sufit z podwojonego pierwiastka



Kształty ułożone z 1–5 trójkątów równobocznych. Nazywa się je „poliamondami”, ponieważ po angielsku dwa trójkąty tworzą „di-amond” (karo, $\diamond$). Jako że „diament” nie jest w Polsce zwyczajową nazwą rombu, moglibyśmy nazywać konfiguracje trójkątów „poliapezami”, skoro trzy tworzą „tri(i)-apez”...

Tym razem jakakolwiek różnorodność pojawia się dopiero przy czterech polach, choć wszystkie trzy przypadki mają ten sam obwód (6). Dla pięciu kafelków również każda konfiguracja daje taki sam obwód (7). Do tego momentu otrzymujemy bardzo przyjemny postęp arytmetyczny, ale sześć trójkątów równobocznych pozwala nam zbudować sześciokąt foremny, którego obwód wynosi 6. Okazuje się, że funkcja minimalnego obwodu dla kafelków trójkątnych nie jest nawet monotoniczna!

Można by się spodziewać, że dla dużych n obwód „okrągłej masy” trójkątów zacznie zachowywać się „normalnie”, ale w pewnym sensie „skacze” jeszcze bardziej:

$$3, 4, 5, 6, 7, 6, 7, 8, 9, 8, 9, 10, 9, 10, 11, 10, 11, 12, 11, 12, 13, 12, 13, 14, \dots$$

Dopełnieniem tego obrazu grozy jest jawny wzór:

$$2 \left\lceil \frac{n + \sqrt{6n}}{2} \right\rceil - n.$$

Jego elementarne wyprowadzenie przedstawimy w części drugiej.

Bryły rozpięte na krzywych

Jarosław GÓRNICKI*

* Kontakt: gornicki59@gmail.com

Znany już w starożytności problem izoperymetryczny:

Który z trójkątów o ustalonym obwodzie ma największe pole?

rozwiążemy elementarnie, korzystając z nierówności między średnimi.

Przypomnijmy, że średnia geometryczna dodatnich liczb jest nie większa niż ich średnia arytmetyczna. Dla trzech dodatnich liczb x, y, z stwierdzenie to przybiera postać:

$$\sqrt[3]{xyz} \leq \frac{1}{3}(x + y + z),$$

wiec jeśli $x + y + z = d$, to iloczyn xyz ma wartość największą, gdy $x = y = z = \frac{1}{3}d$, bo wtedy $xyz = (\frac{1}{3}d)^3 = [\frac{1}{3}(x + y + z)]^3$.

Pole trójkąta o bokach długości a, b, c można łatwo obliczyć, korzystając ze znanego już od I wieku wzoru *Herona*:

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}, \text{ gdzie } p = \frac{1}{2}(a + b + c),$$

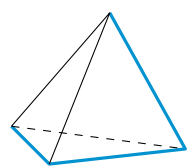
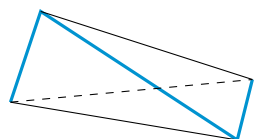
dlatego przy ustalonym obwodzie $a + b + c$ wartość S jest największa, gdy $p - a = p - b = p - c$, czyli gdy $a = b = c$.

Wykazaliśmy więc twierdzenie:

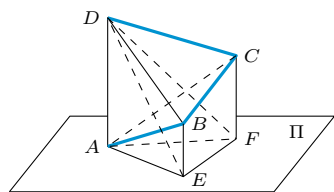
Czytelników, którzy nie znają dowodu tego faktu, zachęcamy do wykazania go, szczególnie w używanym w tym artykule przypadku trzech liczb.

Rozwiązanie problemu izoperymetrycznego podane jest w książce: J. Górnicki, *Okruchy matematyki*, WN PWN, Warszawa 2009, w artykułach *Nierówności, wypukłość i ekstrema* oraz *Własności ekstremalne figur izoperymetrycznych*.

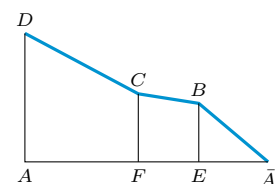
Krzywą nazywamy *prostowalną*, gdy istnieje możliwość określenia jej długości jako granicy ciągu długości łamanych coraz lepiej ją przybliżających.



Rys. 1

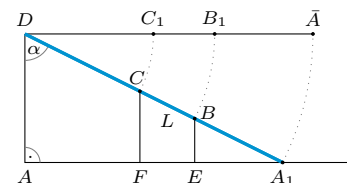


Rys. 2



Rys. 3. Sytuacja przed optymalizacją

Wielościan to bryła ograniczona płaszczyznami. Wielościan jest *wypukły*, gdy leży po jednej stronie każdej ze swoich ścian.



Rys. 4. Sytuacja po optymalizacji

Twierdzenie 1. *Trójkąt o danym obwodzie ma największe pole, gdy jest równoboczny.*

Prawdziwy jest fakt ogólniejszy (znany już w starożytnej Grecji):

Twierdzenie 2 (Zenodor, III/II w. p.n.e.). *Wielokąt o ustalonym obwodzie ma największe pole, gdy jest foremny.*

Problematyka „ekstremalna” w przestrzeni trójwymiarowej (czyli w przestrzeni euklidesowej $\mathbb{R}^3$) jest odrobinę bardziej kłopotliwa. Naszym celem będzie rozwiązanie elementarnymi środkami następującego problemu:

Problem. *Jaki kształt krzywej (prostowalnej) o długości L zapewnia, że najmniejszy zbiór wypukły zawierający tę krzywą ma największą objętość.*

Problematyka ta pojawiła się w XX wieku m.in. w pracach J. Egerváry’ego, M. Krejna, Z. Melzaka, A. Nudelmana, I. Schoenberga.

Czworościan ekstremalny. Zaczniemy od prostej sytuacji. Łamaną o czterech wierzchołkach, które nie leżą w jednej płaszczyźnie, nazywamy *szkieletem czworościanu* (rys. 1). Nasz problem w tym przypadku ma postać: *jaki szkielet $ABCD$ o danej długości $AB + BC + CD = L$ rozpina czworościan $ABCD$ o największej objętości?*

Rozwiążemy ten problem, sprowadzając go do omówionego już problemu izoperymetrycznego na płaszczyźnie. Przyjmijmy, że w czworościanie $ABCD$ długość boku AD jest równa h (oczywiście $h < L$). Niech Π będzie płaszczyzną prostopadłą do boku AD zaczepioną w punkcie A . Wtedy rzut prostopadły czworościanu $ABCD$ na płaszczyznę Π jest trójkątem AEF (rys. 2).

Lemat 1. *Objętość V czworościanu $ABCD$ dana jest wzorem*

$$(1) \quad V = \frac{1}{3}hS,$$

gdzie h jest długością boku AD , a S jest polem trójkąta AEF .

Czworościany $ABCD$ i $ABFD$ mają wspólną ścianę – trójkąt ABD . Ponieważ punkty C i F są w takiej samej odległości od płaszczyzny trójkąta ABD , więc objętości tych czworościanów są równe. Podobnie czworościany $ABFD$ i $AEFD$ mają wspólną ścianę – trójkąt AFD . Punkty B i E są w takiej samej odległości od płaszczyzny trójkąta AFD , więc objętości tych czworościanów są równe. Zatem czworościany $ABCD$ i $AEFD$ mają równe objętości, a objętość czworościanu $AEFD$ wyraża się wzorem (1). $\square$

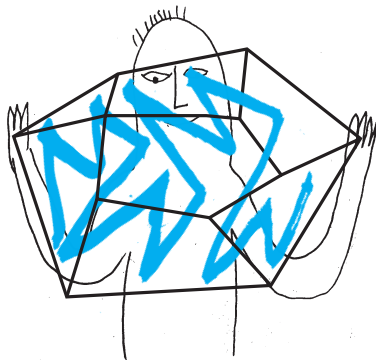
Lemat 2. *Szkielet $ABCD$ o długości L i odległości $AD = h$ ($h < L$) rozpina czworościan $ABCD$ o największej objętości, gdy boki AB , BC , CD mają równe długości i tworzą z odcinkiem AD kąty równe $\alpha = \arccos \frac{h}{L}$.*

Zgodnie ze wzorem (1) objętość V czworościanu $ABCD$ będzie największa, gdy największe będzie pole S , bo h jest ustalone. Musimy więc określić długość i położenie w przestrzeni boków AB , BC i CD tak, aby pole trójkąta AEF było największe. Zgodnie z twierdzeniem 1 osiągniemy to, jeśli zmaksymalizujemy obwód trójkąta AEF , jednocześnie sprawiając, że będzie to trójkąt równoboczny.

Bryła $DABEFC$ jest wielościanem wypukłym o podstawie trójkątnej i ścianach bocznych prostopadłych do płaszczyzny Π .

Rozetnijmy ten wielościan wzdłuż pionowych krawędzi DA , BE , CF oraz pozostałych krawędzi szkieletu. Teraz połóżmy ściany $DAFC$, $CFEB$, BEA na płaszczyźnie Π na zewnątrz trójkąta AEF . Następnie przesunąć je w taki sposób, aby połączyć je pasującymi do siebie bokami (rys. 3).

Odcinek AA' ma długość równą obwodowi trójkąta AEF , utworzonego z rzutów prostopadłych odcinków DC , CB , BA na płaszczyznę Π . Rzuty te będą w sumie najdłuższe, gdy punkty D, C, B, A' (rys. 3) będą leżały na jednej prostej. Będzie ona nachylona do odcinka DA pod kątem $\alpha = \arccos \frac{h}{L}$ (rys. 4). Warunki $AF = FE = EA$ zapewnimy, gdy boki DC , CB , BA szkieletu $ABCD$ będą tej samej długości. Ten opis jednoznacznie wyznacza położenie wierzchołków czworościanu: na płaszczyźnie Π stawiamy prawidłowy graniastosłup trójkątny,



którego pionowa krawędź $DA = h$ ($A \in \Pi$), a podstawa ma obwód równy $\sqrt{L^2 - h^2}$. Kolejne odcinki DC , CB , BA leżą na kolejnych ścianach bocznych graniastoslupa, tworząc za każdym razem kąt $\alpha = \arccos \frac{h}{L}$ z odcinkiem DA (oczywiście ten sam efekt uzyskamy, gdy kolejne odcinki AB , BC , CD będą tworzyły za każdym razem kąt α z odcinkiem AD). Tak utworzony szkielet $ABCD$ o długości L i odległości $DA = h$ ($h < L$) rozpina czworościan $ABCD$ o największej objętości. $\square$

Objętość tak określonego czworościanu, zgodnie ze wzorem (1), jest równa $V = \frac{\sqrt{3}}{108} \cdot h(L^2 - h^2)$, gdzie $0 < h < L$. Łatwo sprawdzamy, że przyjmuje ona wartość największą dla $h = \frac{L}{\sqrt{3}}$, więc czworościan ekstremalny ma objętość równą $\frac{1}{162} \cdot L^3 \approx 0,006 \cdot L^3$. Co ciekawe, czworościan foremny o krawędzi $\frac{L}{3}$ ma objętość równą $\frac{\sqrt{2}}{324} \cdot L^3 \approx 0,0044 \cdot L^3$, czyli istotnie mniejszą niż czworościan ekstremalny.

Udowodniliśmy więc następujące twierdzenie o czworościanie ekstremalnym:

Twierdzenie 3. Szkielet $ABCD$ o długości L rozpina czworościan o największej objętości, gdy kolejne boki AB , BC , CD leżą na kolejnych ścianach bocznych prawidłowego graniastoslupa trójkątnego o pionowej krawędzi $AD = \frac{L}{\sqrt{3}}$ i obwodzie podstawy $\sqrt{\frac{2}{3}} \cdot L$, a każdy z odcinków AB , BC , CD tworzy z krawędzią AD kąt $\alpha = \arccos \frac{1}{\sqrt{3}}$.

Wielościan ekstremalny. Uogólnijmy teraz rozważania dotyczące czworościanu ekstremalnego na wielościany o większej liczbie wierzchołków. Łamaną $A_0A_1A_2 \dots A_n$ ($n \geq 3$), dla której każda płaszczyzna przechodząca przez punkty A_0 i A_n ($A_0 \neq A_n$) ma nie więcej niż jeden punkt wspólny z łamaną $A_1A_2 \dots A_{n-1}$, nazywamy *szkieletem*.

Przyjmijmy, że szkielet $A_0A_1A_2 \dots A_{n-1}A_n$ ma długość $A_0A_1 + A_1A_2 + \dots + A_{n-1}A_n = L$, a długość odcinka A_0A_n jest równa h ($h < L$). Trójkątne ściany $A_0A_1A_n$, $A_0A_1A_2$, $A_0A_2A_3$, $\dots$, $A_0A_{n-1}A_n$ oraz $A_nA_{n-1}A_0$, $A_nA_1A_2$, $A_nA_2A_3$, $\dots$, $A_nA_{n-2}A_{n-1}$ wycinają w przestrzeni $\mathbb{R}^3$ wielościan $A_0A_1A_2 \dots A_{n-1}A_n$ rozpięty przez szkielet $A_0A_1A_2 \dots A_{n-1}A_n$ (rys. 5).

Niech Π będzie płaszczyzną prostopadłą do odcinka A_0A_n zaczepioną w punkcie A_0 . Wtedy rzut prostopadły wielościanu $A_0A_1A_2 \dots A_{n-1}A_n$ na płaszczyznę Π jest n -kątem $A_0A'_1A'_2 \dots A'_{n-1}$ o polu S_n (rys. 5).

Ponieważ wielościan $A_0A_1A_2 \dots A_{n-1}A_n$ jest skończoną sumą czworościanów $A_0A_1A_2A_n$, $A_0A_2A_3A_n$, $\dots$, $A_0A_{n-2}A_{n-1}A_n$, a do każdego z nich ma zastosowanie lemat 1, więc prawdziwy jest następujący rezultat:

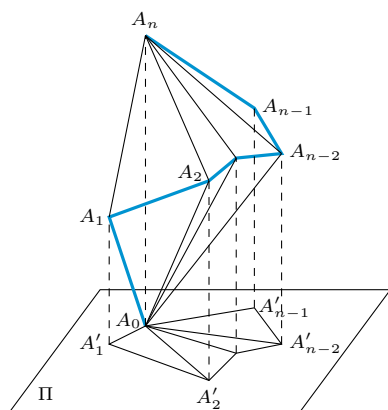
Lemat 3. Objętość W_{n+1} wielościanu $A_0A_1A_2 \dots A_{n-1}A_n$ dana jest wzorem

$$(2) \quad W_{n+1} = \frac{1}{3} h S_n,$$

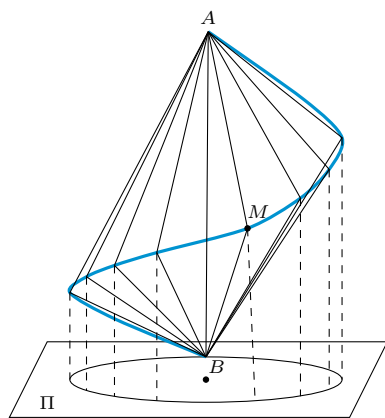
gdzie h jest długością odcinka A_0A_n , a S_n jest polem n -kąta $A_0A'_1A'_2 \dots A'_{n-1}$.

Korzystając z twierdzenia 2 (Zenodora) oraz powtarzając rozumowanie uzasadniające lemat 2, uzyskujemy następującą konstrukcję maksymalizującą objętość wielościanu $A_0A_1A_2 \dots A_{n-1}A_n$ rozpiętego na szkielecie $A_0A_1A_2 \dots A_{n-1}A_n$ o długości L i odległości $A_0A_n = h$ ($h < L$): na płaszczyźnie Π stawiamy prawidłowy graniastosłup n -kątny o pionowej krawędzi $A_0A_n = h$ ($A_0 \in \Pi$), którego podstawa ma obwód równy $\sqrt{L^2 - h^2}$. Kolejne odcinki A_0A_1 , A_1A_2 , $\dots$, $A_{n-1}A_n$ leżą na kolejnych ścianach bocznych graniastoslupa, tworząc za każdym razem z odcinkiem A_0A_n kąt $\alpha = \arccos \frac{h}{L}$.

Ponieważ pole n -kąta foremnego ($n \geq 3$) o boku długości a i kącie środkowym $\gamma = \frac{2\pi}{n}$ dane jest wzorem $S_n = \frac{1}{4} n a^2 \operatorname{ctg} \frac{\gamma}{2}$, więc ze wzoru (2) objętość wielościanu $A_0A_1A_2 \dots A_{n-1}A_n$ (którego rzut prostopadły na płaszczyznę Π jest n -kątem foremnym) dana jest wzorem $W_{n+1} = \frac{1}{12} \cdot h(L^2 - h^2) \cdot \frac{1}{n} \operatorname{ctg} \frac{\pi}{n}$. Objętość ta jest największa, gdy $h = \frac{L}{\sqrt{3}}$, i wówczas $W_{n+1} = \frac{1}{18\sqrt{3}} L^3 \cdot \frac{1}{n} \operatorname{ctg} \frac{\pi}{n}$. Mamy więc twierdzenie:



Rys. 5



Rys. 6

Jeśli na prostokątnym arkuszu papieru narysujemy prostą, która nie jest prostopadła do któregośkolwiek brzegu, i nawiniemy ten arkusz na walec o podstawie kołowej, to narysowana linia prosta przybierze kształt linii śrubowej. Gdy środek podstawy walca o promieniu $\frac{L}{\pi\sqrt{6}}$ jest środkiem kartezjańskiego układu współrzędnych (oś walca pokrywa się z osią OZ), to linia śrubowa o skoku $\frac{L}{\sqrt{3}}$, leżąca na powierzchni bocznej walca dana jest równaniami parametrycznymi: $x(t) = \frac{L}{\pi\sqrt{6}} \cdot \cos t$, $y(t) = \frac{L}{\pi\sqrt{6}} \cdot \sin t$, $z(t) = \frac{L}{2\pi\sqrt{3}} \cdot t$, gdzie $0 \leq t \leq 2\pi$ oraz $B = (x(0), y(0), z(0))$, $A = (x(2\pi), y(2\pi), z(2\pi))$ (rys. 6).

Twierdzenie 4. Szkielet $A_0A_1 \dots A_n$ o długości L rozpina wielościan o największej objętości, gdy kolejne boki $A_0A_1, \dots, A_{n-1}A_n$ leżą na kolejnych ścinach bocznych prawidłowego graniastostupa n -kątowego o pionowej krawędzi $A_0A_n = \frac{L}{\sqrt{3}}$ i obwodzie podstawy $\sqrt{\frac{2}{3}} \cdot L$, a każdy z odcinków $A_0A_1, A_1A_2, \dots, A_{n-1}A_n$ tworzy z krawędzią A_0A_n kąt $\alpha = \arccos \frac{1}{\sqrt{3}}$.

Śrubostopek podwójny. Możemy teraz przejść do rozwiązania naszego oryginalnego problemu. Z geometrii różniczkowej wiemy, że krzywa przestrzenna leżąca na powierzchni walca jest linią śrubową wtedy i tylko wtedy, gdy styczna do niej w każdym jej punkcie tworzy stały kąt z kierunkiem osi walca. Zatem gdy liczba n będzie rosła nieograniczenie, to prawidłowe graniastostupy n -kątne coraz „ściślej” będą przylegać do walca o wysokości $BA = \frac{L}{\sqrt{3}}$ i promieniu podstawy $\frac{L}{\pi\sqrt{6}}$ (rys. 6), a łamana $BA_1A_2 \dots A_{n-1}A$ (której kolejne odcinki tworzą stały kąt $\alpha = \arccos \frac{1}{\sqrt{3}}$ z odcinkiem AB równoległym do osi walca) coraz dokładniej będzie aproksymować krzywą leżącą na powierzchni bocznej walca, która jest jednym zwojem linii śrubowej (helisy) o skoku $\frac{L}{\sqrt{3}}$.

Jeśli punkt M porusza się po linii śrubowej, to odcinki BM oraz AM zakreślają powierzchnie stożkowe i powstaje bryła śrubostopek podwójny (rys. 6). Ponieważ $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \operatorname{ctg} \frac{\pi}{n} = \frac{1}{\pi}$, więc objętość tak powstałego śrubostopka podwójnego jest równa $\lim_{n \rightarrow \infty} W_{n+1} = \frac{1}{18\pi\sqrt{3}} L^3 \approx 0,01 \cdot L^3$.

Ostatecznie otrzymujemy rozwiązanie postawionego problemu:

Twierdzenie 5 (J. Egerváry, 1949). Spośród wszystkich brył rozpiętych na gładkiej krzywej o długości L największą objętość ma bryła będąca otoczką wypukłą jednego zwoju linii śrubowej o skoku $\frac{L}{\sqrt{3}}$ na powierzchni walca kołowego o promieniu podstawy $\frac{L}{\pi\sqrt{6}}$.

„Sir Roger Penrose. Geniusz i jego droga do rzeczywistości”

Książka „Sir Roger Penrose. Geniusz i jego droga do rzeczywistości” autorstwa Patchena Barssa to opowieść o jednym z najoryginalniejszych umysłów XX wieku, matematyku, fizyku i filozofie. Autor ukazuje swojego bohatera w gronie wybitnych postaci świata nauki i sztuki, a zarazem na tle środowiska, z którego wyrastał. Rodzina Penrose’ów to ludzie utalentowani, których pasja intelektualna kształtowała atmosferę domu – choć dzieciństwo Rogera nie było wolne od trudności w przestrzeni emocjonalnej – to właśnie w tym świecie rodził się jego niezwykle sposób myślenia.

Podczas lektury tej biografii czytelnik przenosi się w fascynujący świat idei, teorii i odkryć. Książkę czyta się jednym tchem – to dynamiczny strumień faktów biograficznych, przeplatających się z refleksjami o nauce, matematyce i naturze poznania. Niekoniecznie trzeba być znawcą fizyki teoretycznej, aby czerpać przyjemność z lektury, podążając za bohaterem w jego „podróżach” po tajemniczych strukturach Wszechświata. Prawda i piękno to motywy wiodące, siła napędowa w poszukiwaniach Rogera Penrose’a – to pojęcia, które łączy w swojej naukowej i filozoficznej refleksji. Sam uczony mówi o procesie odkrywania w sposób ujmujący prostotą i szczerością:

„A gdy ulegamy fascynacji jakimś zagadnieniem, kierujemy się jego wewnętrzną estetyką. Czasami

okazuje się, że to, czym się zajmowaliśmy, można wykorzystać w jakimś innym obszarze, ale w wielu przypadkach tak nie jest. To jedna z najwspanialszych cech matematyki. [...] Często robimy coś bez żadnego powodu, tylko dlatego, że mamy na to ochotę, i właśnie dzięki temu dokonuje się postęp, który w przeciwnym razie nigdy by nie nastąpił” [s. 289].

Współpracownicy Penrose’a wspominają jego nieprawdopodobny, niemal mistyczny sposób myślenia: „Odkrycia Penrose’a wyglądają tak, jak gdyby były dziełem jakiejś nadludzkiej formy życia”. Barss nie pomija jednak bardziej ludzkich wątków – trudności w relacjach, napięcie emocjonalnych i dylematów, które towarzyszyły uczonemu w życiu osobistym. To postać z krwi i kości... W książce czytamy o jego ludzkich ograniczeniach, problemach z kobietą, którą poślubił, oraz jego „muzami” – wybrankami jego potrzeby twórczej. Dzięki temu portret Penrose’a zyskuje głębię i wiarygodność.

„Roger Penrose” to opowieść o człowieku, który całe życie który całe życie próbował dotrzeć do skraju ludzkiego pojmowania rzeczy. Książkę polecam wytrawnym poszukiwaczom prawdy w fizyce, poszukiwaczom estetyki w matematyce, a przede wszystkim wielbicielom emocji związanych z odkrywaniem prawdy o życiu wybitnych ludzi.

Marzanna WAWRO