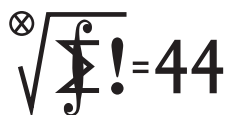


Klub 44 M



Termin nadsyłania rozwiązań: 31 III 2026

Czołówka ligi zadaniowej **Klub 44 M**
po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań
903 ($WT = 1,45$) i 904 ($WT = 1,36$)
z numeru 6/2025

Jerzy Cisko	Wrocław	46,09
Szymon Kitowski		43,92
Barbara Mroczek		43,05
Andrzej Daniluk	Warszawa	40,76
Mikołaj Znamierowski		40,68
Marian Łupieżowiec	Gliwice	38,54
Krzysztof Kamiński	Pabianice	38,09
Roksana Słowik		37,51
Michał Adamaszek	Kopenhaga	37,30
Stanisław Bednarek	Łódź	37,24

Moment godny uwagi: pan Jerzy Cisko –
44 p. po raz osiemnasty!

905. Z uwagi na równość $f(x) = x - g(x)$, gdzie $g(x) = x(x^2 + 1)^{-1}$, warunek zadania jest (dla liczb całkowitych $a, b, c \geq 1$) równoważny temu, by suma $g(a) + g(b) + g(c)$ była liczbą całkowitą. W przedziale $[1, \infty)$ funkcja g jest malejąca. Jej wartości dla argumentów $1, 2, 3, 4, 5, \dots$ wynoszą, kolejno:

$$\frac{1}{2}, \frac{2}{5}, \frac{3}{10}, \frac{4}{17}, \frac{5}{26}, \dots,$$

więc jedyną możliwą całkowitą wartością wypisanej sumy jest $g(a) + g(b) + g(c) = 1$. Przyjmijmy (b.s.o.), że $a \leq b \leq c$; wówczas $g(a) \geq g(b) \geq g(c)$ oraz $g(a) \geq \frac{1}{3}$, czyli $a = 1$ lub $a = 2$. Dalej, musi być $g(b) \geq \frac{1}{2}(1 - g(a))$. Dla $a = 1$ oraz dla $a = 2$ to daje, odpowiednio, $g(b) \geq \frac{1}{4}$ oraz $g(b) \geq \frac{3}{10}$; w obu przypadkach to oznacza, że $b \leq 3$.

Pozostaje sprawdzić, czy dla uzyskanych par (a, b) ($= (1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 2), (2, 3)$) różnica $1 - (g(a) + g(b))$ jest możliwą wartością $g(c)$. Jedynie dla $a = 2, b = 3$ tak jest; wtedy także $c = 3$ i $g(2) + g(3) + g(3) = \frac{2}{5} + \frac{3}{10} + \frac{3}{10} = 1$, zaś $f(2) + f(3) + f(3) = (2 + 3 + 3) - 1 = 7$. To jedyna możliwa wartość sumy $f(a) + f(b) + f(c)$.

906. Ustalmy kartezjański układ współrzędnych $Oxyz$, w którym parabola P jest dana równaniem $y = x^2, z = 0$ (b.s.o., bo wszystkie parabole są podobne). Ma ona wierzchołek $\mathbf{w} = (0, 0, 0)$ i ognisko $\mathbf{f} = (0, \frac{1}{4}, 0)$ (kierownicą jest prosta $x = z = 0, y = -\frac{1}{4}$). Weźmy dowolny stożek obrotowy C , na którym leży P . Przyjmijmy, że wierzchołkiem C jest punkt $\mathbf{p}_0 = (x_0, y_0, z_0)$. Oznaczmy przez φ miarę kąta ostrego między jego osią obrotu i tworzącą i niech $c = \cos \varphi$ (zatem $0 < c < 1$). Niech $\mathbf{u} = (u, v, w)$ będzie wersorem kierunkowym osi obrotu, zorientowanym tak, by $v > 0$ (wersor to wektor o długości 1).

Dowolnie wybrany punkt przestrzeni $\mathbf{p} = (x, y, z)$ leży na stożku C wtedy i tylko wtedy, gdy kąt między wektorami $\mathbf{p} - \mathbf{p}_0$ oraz $\mathbf{u}$ ma miarę φ lub $\pi - \varphi$; czyli gdy jego kosinus (dany znanym wzorem $\frac{\mathbf{u} \cdot (\mathbf{p} - \mathbf{p}_0)}{\|\mathbf{u}\| \cdot \|\mathbf{p} - \mathbf{p}_0\|}$) jest równy $\pm c$. Skoro $\|\mathbf{u}\| = 1$, warunek ten po rozpisaniu na współrzędne przybiera postać

$$(1) \quad u(x - x_0) + v(y - y_0) + w(z - z_0) = \pm c \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2}.$$

Zadania z matematyki nr 913, 914

Redaguje Marcin E. KUCZMA

913. Niech m będzie liczbą naturalną nieparzystą. Wyznaczyć największą możliwą liczbę zbioru M , zawartego w przedziale $[-m, m]$, złożonego z liczb całkowitych, w którym każda trójka różnych liczb ma sumę różną od zera.

914. Znaleźć wszystkie pary a, b liczb rzeczywistych różnych od zera, dla których funkcja $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dana wzorem $f(x) = |\sin(ax)| + |\cos(bx)|$ jest okresowa.

Zadanie 914 zaproponował pan Witold Bednarek z Łodzi.

Rozwiązania zadań z numeru 9/2025

Przypominamy treść zadań:

905. Niech $f(x) = x^3(x^2 + 1)^{-1}$. Wyznaczyć wszystkie całkowite dodatnie wartości sumy $f(a) + f(b) + f(c)$ dla dowolnych liczb całkowitych a, b, c .

906. W przestrzeni (trójwymiarowej) dana jest parabola P . Niech R będzie zbiorem wszystkich punktów, będących wierzchołkami stożków obrotowych, na których leży P [przez stożek obrotowy rozumiemy tu powierzchnię powstałą przez obrót prostej wokół przecinającej ją (nie prostopadle) innej prostej (osi obrotu)].

Udowodnić, że zbiór R także jest parabolą oraz wyjaśnić, jak są usytuowane jej wierzchołek i ognisko względem wierzchołka i ogniska paraboli P . [Wierzchołek paraboli to punkt jej przecięcia z osią symetrii; ognisko to punkt (w jej płaszczyźnie) określony przez własność: każdy punkt paraboli jest jednakowo odległy od ogniska i od pewnej prostej (zwanej kierownicą)].

Jest to więc równanie powierzchni stożka C . Parabola P leży na niej, jeśli po podstawieniu $y = x^2, z = 0$ równanie (1) jest spełnione dla każdej liczby rzeczywistej x . Przez podniesienie stronami do kwadratu wnosimy, że zawieranie $P \subset C$ ma miejsce wtedy i tylko wtedy, gdy

$$(2) \quad (u(x - x_0) + v(x^2 - y_0) + w(-z_0))^2 = c^2((x - x_0)^2 + (x^2 - y_0)^2 + z_0^2) \quad \text{dla } x \in \mathbb{R}.$$

To równość dwóch wielomianów zmiennej x , czwartego stopnia. Przyrównując współczynniki przy x^4 po lewej i prawej stronie, a następnie współczynniki przy x^3 , dostajemy równości $v^2 = c^2, 2uv = 0$; czyli (pamiętając, że $v > 0, c > 0$): $v = c, u = 0$. Wstawiamy te wartości do (2) i po redukcji dostajemy równanie

$$(3) \quad -2cwz_0(x^2 - y_0) + w^2z_0^2 = c^2(x - x_0)^2 + z_0^2c^2.$$

Kolejne przyrównanie współczynników, tym razem przy x^2 oraz x^1 , pokazuje, że $-2cwz_0 = c^2, -2c^2x_0 = 0$, skąd $wz_0 = -\frac{1}{2}c, x_0 = 0$. Równanie (3) redukuje się do postaci $-c^2y_0 + (-\frac{1}{2}c)^2 = c^2z_0^2$, czyli $y_0 = \frac{1}{4} - z_0^2$.

Zważywszy, że stożek C (zawierający parabolę P) był wybrany dowolnie, więc jego wierzchołek był dowolnym punktem zbioru R , widzimy, że zbiór R jest opisany równaniami

$$x = 0, \quad y = \frac{1}{4} - z^2.$$

Jest zatem parabolą, leżącą w płaszczyźnie $x = 0$, izometryczną z parabolą P . Jej wierzchołkiem jest punkt $\tilde{\mathbf{w}} = (0, \frac{1}{4}, 0)$, a ogniskiem punkt $\tilde{\mathbf{f}} = (0, 0, 0)$ (obraz ogniska paraboli P w tej izometrii). Pierwszy z nich pokrywa się z ogniskiem paraboli P , drugi z jej wierzchołkiem: $\tilde{\mathbf{w}} = \mathbf{f}, \tilde{\mathbf{f}} = \mathbf{w}$. To właśnie usytuowanie, o które chodziło w zadaniu.

[Autor zadania, Janusz Fiett, zwrócił uwagę na artykuł *Stożkowe* (w Δ_{13}^{12}), w którym jest opisana własność pozwalająca uprościć rozwiązanie: sfera wpisana w stożek, styczna do płaszczyzny przecinającej jego powierzchnię wzdłuż paraboli, ma punkt styczności z tą płaszczyzną będący ogniskiem tej paraboli. Zachęcamy Czytelników do zapoznania się z tym artykułem i do dopracowania rozwiązania tą metodą.]

Klub 44 F



Termin nadsyłania rozwiązań: 31 III 2026

Zadania z fizyki nr 810, 811

Redaguje Elżbieta ZAWISTOWSKA

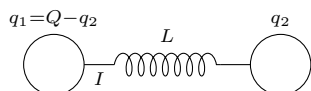
810. Gładki, jednorodny sznurek o długości l i masie m przerzucony jest przez niewielki nieruchomy blok tak, że w chwili początkowej pozostaje w równowadze, a po lekkim przesunięciu zaczyna ześlizgiwać się z bloku. Znaleźć siłę nacisku sznurka na blok w chwili, gdy jego długość z jednej strony wynosi $l/3$.

811. Naładowany kondensator płaski znajduje się w jednorodnym polu magnetycznym, którego linie są prostopadłe do płaszczyzn okładek. Odległość między okładkami wynosi d , indukcja pola magnetycznego B . Wewnątrz kondensatora, koło ujemnie naładowanej okładki znajduje się źródło powolnych elektronów wysyłanych w różnych kierunkach. Jakie musi być napięcie między okładkami, aby elektrony ogniskowały się z możliwie najlepszą dokładnością na dodatnio naładowanej okładce? Oddziaływanie między elektronami zanedbujemy.

Rozwiązania zadań z numeru 9/2025

Przypominamy treść zadań:

W treści zadania **803** w wydrukowanej wersji numeru wrześniowego pojawił się oczywisty błąd – ładunek kuli nienaładowanej nie mógł zmaleć dwukrotnie, bo wynosił zero.



802. Podróżny stał obok początku wagonu z numerem porządkowym k . Pociąg ruszył z miejsca, po czym okazało się, że wagon o numerze m mijał pasażera przez t sekund. Ile czasu przejeżdżał obok tego pasażera wagon o numerze n ? Pociąg poruszał się ruchem jednostajnie przyspieszonym, długości wagonów są jednakowe, odległości między wagonami zanedbywalne. Podróżny nie poruszał się względem peronu.

803. Dwie metalowe kule o promieniach R znajdują się w bardzo dużej odległości od siebie i połączone są cienkim przewodnikiem, w którego rozcięcie włączona jest cewka o współczynniku samoindukcji L . W chwili początkowej jedna z tych kul naładowana jest ładunkiem Q , druga nienaładowana. Po jakim czasie ładunek kuli naładowanej zmaleje dwukrotnie?

802. Oznaczmy przez Δt_i czas, w którym i -ty wagon przejeżdża obok podróżnego ($i \geq k$). Wtedy

$$(1) \quad l = \frac{a \Delta t_k^2}{2} \Rightarrow \Delta t_k = \sqrt{\frac{2l}{a}},$$

gdzie a jest przyspieszeniem pociągu, l długością wagonu. Zgodnie z treścią zadania

$$(2) \quad \Delta t_m = t.$$

Oznaczmy przez t_i czas, w którym przejechały obok podróżnego wagony, zaczynając od numeru k , a kończąc na numerze i . Zachodzą związki:

$$(3) \quad \Delta t_i = t_i - t_{i-1}.$$

W czasie t_i obok podróżnego przejechało $i - k + 1$ wagonów, zatem

$$(4) \quad (i + 1 - k)l = \frac{a t_i^2}{2} \Rightarrow t_i = \sqrt{\frac{2l(i + 1 - k)}{a}},$$

stąd zgodnie z (1)

$$t_i = \Delta t_k \sqrt{i + 1 - k}, \quad t_{i-1} = \Delta t_k \sqrt{i - k}.$$

Uwzględniając (2) i (3):

$$\begin{aligned} \Delta t_m &= \Delta t_k (\sqrt{m + 1 - k} - \sqrt{m - k}) \\ \Rightarrow \Delta t_k &= \frac{t}{\sqrt{m + 1 - k} - \sqrt{m - k}}. \end{aligned}$$

Szukany czas wynosi:

$$\Delta t_n = t \frac{\sqrt{n + 1 - k} - \sqrt{n - k}}{\sqrt{m + 1 - k} - \sqrt{m - k}}.$$

803. Oznaczmy przez q_2 ładunek, który przeszedł do chwili t na kulę nienaładowaną (rys.), ładunek na pierwszej kuli wynosi w tym momencie $q_1 = Q - q_2$, a napięcie na cewce

$$U = \phi_1 - \phi_2 = \frac{Q - q_2}{4\pi\epsilon_0 R} - \frac{q_2}{4\pi\epsilon_0 R} = \frac{Q - 2q_2}{4\pi\epsilon_0 R}.$$

Natężenie prądu w cewce $I = \frac{dq_1}{dt} = -\frac{dq_2}{dt}$ zmienia się zgodnie z wzorem

$$U = -L \frac{dI}{dt} \Rightarrow \frac{Q - 2q_2}{4\pi\epsilon_0 R} = L \frac{d^2 q_2}{dt^2}.$$

Wprowadzając nową zmienną $q = \frac{Q}{2} - q_2$, otrzymujemy:

$$\frac{d^2 q}{dt^2} + \frac{q}{2\pi\epsilon_0 RL} = 0.$$

Jest to równanie oscylatora harmonicznego z warunkami początkowymi

$$q(0) = \frac{Q}{2}, \quad I(0) = 0.$$

Częstość drgań wynosi $\omega = \sqrt{\frac{1}{2\pi\epsilon_0 RL}}$, okres drgań

$T = 2\pi\sqrt{2\pi\epsilon_0 RL}$. Ładunek na pierwszej sferze $q_1 = \frac{Q}{2} + q$ różni się od q tylko stałą, czyli drga z takim samym okresem. Zmaleje więc dwukrotnie po czasie

$$\tau = \frac{T}{4} = \frac{\pi}{2}\sqrt{2\pi\epsilon_0 RL}.$$

Po tym czasie ładunki na obu sferach wyrównają się do wartości $\frac{Q}{2}$, a napięcie między sferami spadnie do zera.

Skrót regulaminu

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru n w terminie do końca miesiąca $n + 2$. Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze $n + 4$. Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przysyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**. Można je przysyłać również pocztą elektroniczną pod adresem delta@mimuw.edu.pl (preferujemy pliki pdf). Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez

współczynnik trudności danego zadania: $WT = 4 - 3S/N$, przy czym S oznacza sumę ocen za rozwiązania tego zadania, a N – liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (**M** lub **F**) – i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu **44** punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (**M** lub **F**), zostaje on członkiem **Klubu 44**, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo – to tytuł **Weterana**. Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 2/2002 oraz znajduje się na stronie deltami.edu.pl.