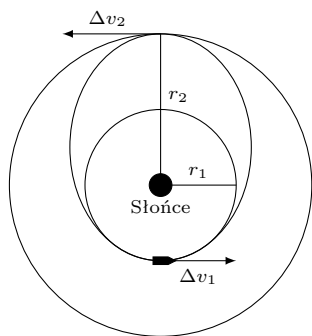


Manewr transferowy Hohmanna: z niskiej orbity ziemskiej na Marsa

* Wydział Chemiczny, Politechnika Śląska
w Gliwicach

O manewrze Hohmanna pisał również Grzegorz Derfel w Δ_{20}^8 . Ciekawemu Czytelnikowi polecamy zajrzeć do wspomnianego artykułu, który opisuje również manewr dwueliptyczny.



Przemysław BORYS*

O manewrze Hohmanna słyszał każdy, kto oglądał film lub czytał książkę *Marsjanin*. Tym właśnie sposobem odbywały się tamtejsze przeloty między Ziemią i Marsem. Manewr ten polega na przeniesieniu pojazdu kosmicznego z jednej orbity kołowej na inną z wykorzystaniem „transferowej” orbity eliptycznej. Takiej drogi nigdy nie pokonuje się, lecąc w linii prostej i hamując dopiero u celu – byłoby to marnotrawstwo energii. Jak się zaraz przekonamy, w manewrze Hohmanna czasami w ogóle nie ma potrzeby hamowania (w najprostszej wersji tylko się przyspiesza).

W manewrze Hohmanna wykorzystuje się dwie sekwencje włączania silników, generujące przyrosty prędkości Δv_1 w perycentrum oraz Δv_2 w apocentrum (rysunek obok). Aby określić wielkości skoków Δv_1 i Δv_2 , skorzystamy z zasady zachowania energii na orbicie:

$$E = \frac{mv^2}{2} - \frac{GMm}{r}.$$

Równanie to szczególnie łatwo jest analizować w apocentrum i perycentrum orbity eliptycznej – punktach największego zbliżenia do ogniska i największego oddalenia (aphelium r_2 i peryhelium r_1 dla ciał krążących wokół Słońca).

Z zasady zachowania energii:

$$\frac{mv_1^2}{2} - \frac{GMm}{r_1} = \frac{mv_2^2}{2} - \frac{GMm}{r_2}.$$

Ponadto w tych punktach (na rysunku: punkty, w których zadaje się impulsy prędkości) prędkość jest prostopadła do promienia, dzięki czemu można łatwo obliczyć iloczyn wektorowy dla momentu pędu:

$$mv_1 r_1 = mv_2 r_2.$$

Z podstawienia powyższego równania do poprzedniego (w celu wyeliminowania v_1):

$$\begin{aligned} v_2^2 \left(1 - \frac{r_2^2}{r_1^2} \right) &= 2GM \left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1} \right) \\ \Rightarrow v_2^2 \cdot \frac{(r_1 - r_2)(r_1 + r_2)}{r_1^2} &= 2GM \cdot \frac{r_1 - r_2}{r_1 r_2}. \end{aligned}$$

Ponieważ dla elipsy $r_1 + r_2 = 2a$ (dwukrotna wielkość półosi wielkiej), po skróceniu $(r_1 - r_2)/r_1$ mamy:

$$v_2^2 = \frac{GM r_1}{a r_2} = \frac{GM(2a - r_2)}{a r_2} = \frac{2GM}{r_2} - \frac{GM}{a}.$$

Korzystając z powyższego równania, możemy wyznaczyć wartość całkowitej energii ciała na orbicie o danej długości wielkiej półosi:

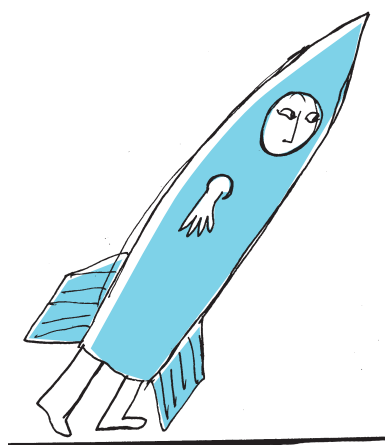
$$E = \frac{mv_2^2}{2} - \frac{GMm}{r_2} = \frac{GMm}{r_2} - \frac{GMm}{2a} - \frac{GMm}{r_2} = -\frac{GMm}{2a}.$$

Podstawiając tę wartość do zasady zachowania energii przytoczonej na początku i skracając masę, uzyskujemy tzw. *równanie vis-viva* (w języku polskim tłumaczone niekiedy jako „całka siły żywej”):

$$(*) \quad v^2 = GM \left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a} \right).$$

Za pomocą tego równania można łatwo znaleźć przyrosty prędkości potrzebne do zmiany orbity. Jeżeli początkowo jesteśmy na orbicie kołowej, to $a = r = r_1$. Potem przechodzimy na orbitę eliptyczną, gdzie $a = (r_1 + r_2)/2$. W końcu docieramy do perycentrum elipsy (ew. apocentrum, jeśli planujemy obniżyć orbitę), gdzie znowu promień równy jest półosi: $a = r = r_2$.

Transfer z orbity ziemskiej na marsjańską



Policzmy przykładowe przyrosty prędkości podczas transferu na orbitę Marsa (orbita kołowa o promieniu $r_2 = 229$ mln km) z orbity ziemskiej o promieniu $r_1 = 150$ mln km). Orbity liczone są wokół Słońca, więc $GM_\odot = 1,3 \cdot 10^{11} \text{ km}^3/\text{s}^2$. Z równania (*) mamy:

$$\begin{aligned} v_1 &= \sqrt{\frac{1,3 \cdot 10^{11}}{10^6} \cdot \frac{1}{150}} = 29,4 \text{ km/s}, \\ v_{12}(r_1) &= \sqrt{\frac{1,3 \cdot 10^{11}}{10^6} \left(\frac{2}{150} - \frac{2}{150 + 229} \right)} = 32,4 \text{ km/s} \Rightarrow \Delta v_1 = 3,0 \text{ km/s}, \\ v_{12}(r_2) &= \sqrt{\frac{1,3 \cdot 10^{11}}{10^6} \left(\frac{2}{229} - \frac{2}{150 + 229} \right)} = 21,2 \text{ km/s}, \\ v_2 &= \sqrt{\frac{1,3 \cdot 10^{11}}{10^6} \cdot \frac{1}{229}} = 23,8 \text{ km/s} \Rightarrow \Delta v_2 = 2,6 \text{ km/s}, \end{aligned}$$

przy czym v_{12} to prędkość na orbicie eliptycznej łączącej orbity Ziemi i Marsa.

W praktyce transfer rzadko jest wykonywany z orbity ziemskiej poza polem grawitacyjnym Ziemi i rzadko wejście na orbitę marsjańską zachodzi daleko od Marsa. Rozpoczynając misję na niskiej orbicie okołoziemskiej (Low Earth Orbit – LEO), $v_{\text{LEO}} = 7,9 \text{ km/s}$, musielibyśmy się po pierwsze wyzwoić z pola grawitacyjnego Ziemi ($M = 5,97 \cdot 10^{24} \text{ kg}$, $r_{\text{LEO}} = 6371 \text{ km}$), a po drugie nadać sondzie prędkość transferową względem Ziemi. Uwzględniając, że dysponujemy już częścią energii kinetycznej, związanej z ruchem po orbicie LEO, możemy rozpisać zachowanie energii:

$$\Delta E = \frac{m(v_{\text{LEO}} + \Delta v)^2}{2} - \frac{mv_{\text{LEO}}^2}{2} = \frac{GMm}{r_{\text{LEO}}} - \frac{mv_{\text{LEO}}^2}{2} + \frac{m(v_{12} - v_1)^2}{2},$$

$$v_{\text{LEO}} + \Delta v = 11,5 \text{ km/s} \Rightarrow \Delta v = 3,6 \text{ km/s}.$$

Powyższą zależność energetyczną można wyrazić w bardziej typowy sposób, mianowicie: aby uzyskać prędkość v_∞ po uwolnieniu się z pola grawitacyjnego planety, przy założeniu prędkości ucieczki $v_{\text{II}} = \sqrt{2GM/R}$, trzeba nadać pojazdowi kosmicznemu prędkość:

$$(**) \quad v = \sqrt{v_{\text{II}}^2 + v_\infty^2}.$$

Prędkości mierzymy tu względem planety – energia najpierw jest wykorzystywana na pokonanie pola grawitacyjnego (w wielkości v_{II}^2), a pozostała część pozostaje zachowana w postaci energii kinetycznej. Jest to ten sam wzór, który mamy wyżej dla ΔE . Zaniedbujemy tutaj efekty oddziaływania ze Słońcem i w tym przybliżeniu zajmujemy się orbitą hiperboliczną (w odległościach pojedynczych milionów kilometrów od planety możemy zaniedbać zakrzywienie trajektorii związane z oddziaływaniem ze Słońcem, co upraszcza analizę!).

Załóżmy teraz, że docieramy w okolice Marsa i zastanawiamy się, jak skorygować prędkość, aby zostać przez niego przechwyconym i wejść na jego orbitę. Skorzystamy z równania (**) łączącego prędkość orbitalną z prędkością ucieczki i prędkością v_∞ , tym razem dla danej prędkości zbliżenia do planety, $v_\infty = v_2 - v_{12}(r_2) = 2,7 \text{ km/s}$. Prędkość ucieczki z Marsa, którego masa wynosi $M_\sigma = 6,39 \cdot 10^{23} \text{ kg}$, a promień $r_\sigma = 3390 \text{ km}$, to:

$$v_{\text{II},\sigma} = \sqrt{\frac{2GM_\sigma}{r_\sigma}} = 5,0 \text{ km/s}.$$

W efekcie, po przechwyceniu przez grawitację planety, przy założeniu maksymalnego zbliżenia aż do odległości r_σ , prędkość na orbicie hiperbolicznej (w przybliżeniu zaniedbującym oddziaływanie ze Słońcem) wyniesie:

$$v = \sqrt{5,0^2 + 2,7^2} = 5,7 \text{ km/s}.$$

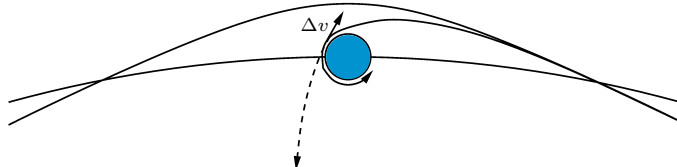
Jako pożyteczne ćwiczenie dla Czytelników proponujemy obliczenie przyrostu Δv_2 z wykorzystaniem orbit hiperbolicznych, omówionych w Δ_{25}^{10} . Wystarczy wyznaczyć parametr zderzenia dla minimalnego zbliżenia do samej powierzchni planety, a następnie wyznaczyć prędkość mijania planety z zachowania momentu pędu.

Odejmując od tego wyniku prędkość orbitalną Marsa (3,6 km/s), uzyskujemy wartość drugiego skoku prędkości:

$$\Delta v_2 = v - v_{I,\odot} = 2,1 \text{ km/s.}$$

W konsekwencji całkowity „budżet delta-v” dla wyprawy na Marsa wynosi:

$$3,6 + 2,1 = 5,7 \text{ km/s.}$$



Aby bliżej uświadomić sobie związek modelowania wejścia na orbitę z orbitami hiperbolicznymi, warto spojrzeć na powyższy rysunek, gdzie Mars orbituje po okręgu, a kołową orbitę przecina elipsa Hohmanna. Pod wpływem grawitacji Marsa w pobliżu planety elipsa (tak naprawdę w tej skali i elipsa Hohmanna, i koło orbity Marsa wyglądają jak linia prosta!) ugina się i przypomina lokalnie hiperbolę. Dzięki impulsowi prędkości z hiperboli wchodzimy na orbitę kołową wokół Marsa.

Zamiast takich obliczeń łatwiej jest wykorzystać tzw. *mapy delta-v* – tabele skoków prędkości niezbędnych do dotarcia z punktu startowego do docelowego. Na takiej mapie rozpoczynamy sumowanie czynników, np. od orbity LEO na Ziemi, a kończymy na LMO nad Marsem.

Strefy oddziaływań planet

Mapy delta-v są dość czytelne, ale wątpliwości może wzbudzić pojęcie „przechwycenia” czy „wejścia w sferę oddziaływania” planety. Sfera oddziaływania definiowana jest jako miejsce, gdzie pojazd kosmiczny – pomiędzy planetą a Słońcem (czy ogólniej: pomiędzy mniejszym ciałem niebieskim a dominującym ciałem niebieskim) – odczuwa zerową siłę wypadkową grawitacji oraz odśrodkową:

$$\frac{GMm}{R^2} + m\omega^2(r_1 - R) - \frac{GM_\odot m}{(r_1 - R)^2} = 0,$$

r_1 oznacza tu promień orbity planety, a R to odległość strefy oddziaływania od planety.

Ponieważ orbitalna prędkość kątowna planety wynika z równowagi siły odśrodkowej z przyciąganiem Słońca:

$$\omega^2 r_1 = \frac{GM_\odot}{r_1^2}.$$

Jednocześnie różnica dwóch ostatnich członów względem punktu równowagi w r_1 jest mała, i aby uprościć rachunki, można skorzystać z następującego przybliżenia:

$$\frac{1}{(r_1 - R)^2} \approx \frac{1}{r_1^2} - R \left[\frac{d}{dr_1} \left(\frac{1}{r_1^2} \right) \right] = \frac{1}{r_1^2} + 2 \frac{R}{r_1^3}.$$

Mamy zatem:

$$\frac{GMm}{R^2} + \frac{GM_\odot m}{r_1^2} - \frac{GM_\odot m}{r_1^3} R = \frac{GM_\odot m}{r_1^2} + 2 \frac{GM_\odot m}{r_1^3} R.$$

I stąd możemy wyznaczyć promień sfery oddziaływania dla Ziemi:

$$R = r_1 \sqrt[3]{\frac{M}{3M_\odot}} = 1,5 \text{ mln km.}$$

Literatura

RR Bate, DD Mueller, JE White, *Fundamentals of Astrodynamics*, Dover, 1971.

W. Hohmann, *Attainability of Celestial Bodies*, NASA, 1925. (równania (41), (45), rys. 25)

JE Marsden, SD Ross, *New Methods in Celestial Mechanics and Mission Design*, *Bulletin of the AMS*, vol. 43, s. 43, 2005.

RD Johnson, Ch Holbrow, *Space Settlements*, NASA, 1977.

Kalkulator trajektorii transferowych: <https://trajbrowser.arc.nasa.gov/>

Mapa „delta-v”: https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/9/93/Solar_system_delta_v_map.svg

