



Bartłomiej PAWLIK

Politechnika Śląska

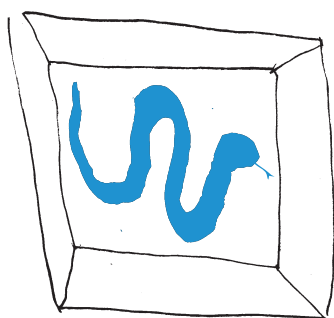
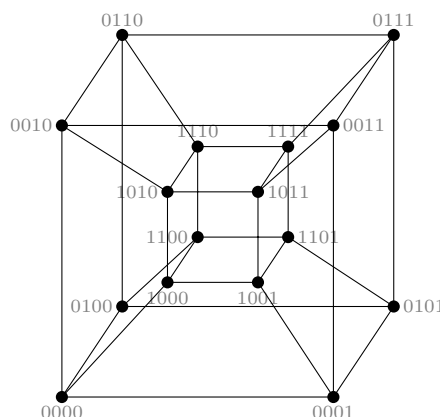
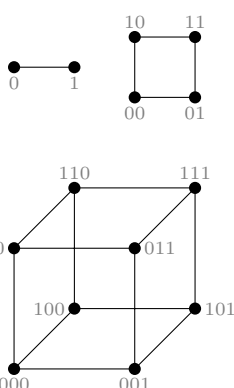
Jakie zwierzątko jest schowane w pudełku? Fizyk zakrzyknąłby: Oczywiście, że kot! Natomiast matematyk wie, że może chodzić o pewnego jadłowitego gada, któremu poświęcony jest niniejszy odcinek naszego Kąta.

Zacznijmy od teoriografowego uogólnienia pojęcia *pudełka*. Kostką n -wymiarową nazywamy graf mający 2^n wierzchołków, każdy z nich etykietujemy jednoznacznie ciągiem binarnym długości n i przyjmujemy, że dwa wierzchołki są połączone krawędzią, gdy ich ciągi binarne różnią się na dokładnie jednej pozycji – takie dwa wierzchołki nazywamy *sąsiednimi*.

Poniżej pokażemy przykładowe reprezentacje graficzne kostek wymiaru nie większego niż 4.

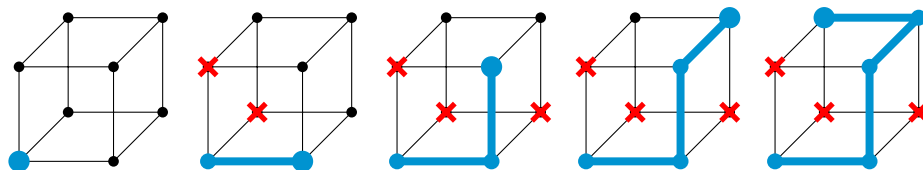
Informatyk mógłby stwierdzić, że chodzi o ciągi binarne, których odległość Hamminga jest równa 1.

Gdybyśmy dodali dwa warunki geometryczne: 1) każda krawędź ma taką samą, ustaloną, długość i 2) każde dwie sąsiednie krawędzie są wzajemnie prostopadłe, to zaprezentowane kostki moglibyśmy nazwać n -wymiarowymi hipersześcianami, a załączony rysunek prezentowałby przykładowe rzuty na płaszczyznę kilku najprostszych hipersześcianów. Są nimi, odpowiednio, odcinek, kwadrat, sześcian i tesseract.



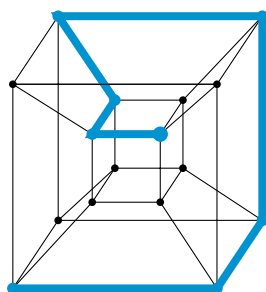
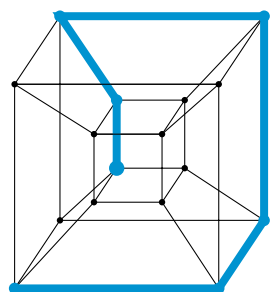
Skonstruujmy ścieżkę w następujący sposób. W rozważanej kostce zaczynamy w dowolnie wybranym wierzchołku i w każdym kroku przechodzimy z ostatnio odwiedzonego wierzchołka do wierzchołka z nim sąsiadującego tak długo, jak jest to możliwe zgodnie z zasadą: po dotarciu do nowego wierzchołka jego poprzednik wraz ze wszystkimi swoimi sąsiadami jest już niedostępny.

Zademonstrujemy to na przykładzie kostki trójwymiarowej (pudełka):



Otrzymaną w ten sposób ścieżkę nazywamy *wężem*.

Długością węża nazywamy liczbę krawędzi, przez które przechodzi. Zauważmy, że każdy wąż w trójwymiarowej kostce ma długość równą 4, natomiast w czterowymiarowej można skonstruować węże różnych długości!



Co ciekawe, dla każdego $n \geq 2$ można łatwo skonstruować relatywnie krótkiego węża – mającego długość $2n - 2$ (czy wiesz jak?). Trochę trudniej jest uzasadnić, że krótsze węże nie występują w przyrodzie. Natomiast określenie rozmiaru najdłuższego węża jest nie lada wyzwaniem! Obecnie znamy go tylko dla wymiarów $n \leq 8$:

1, 2, 4, 7, 13, 26, 50, 98

(OEIS: A099155). Jak długi może być wąż w 9-wymiarowym pudełku? Jeżeli uda Ci się, Czytelniku, znaleźć odpowiedź na to pytanie, to daj mi znać!

Już wiemy, że w pudełku matematyka można znaleźć to samo, co w kieszeni skąpca. Wracając jednak do kotów – zauważmy, że one też bywają umieszczane w różnych miejscach. Koty w pudełkach są uwielbiane przez fizyków, koty w workach przez hazardzystów, a koty w internecie przez nas wszystkich!