



Twierdzenie Cevy – podstawy

Bartłomiej BZDEGA

Uniwersytet im. A. Mickiewicza w Poznaniu

Wśród olimpijczyków oraz pasjonatów geometrii szeroko znane jest

Twierdzenie Cevy. W trójkącie ABC na bokach, odpowiednio, BC , CA , AB leżą punkty P , Q , R . Przyjmijmy oznaczenia jak na rysunku obok i niech

$$s = \frac{a_1}{a_2} \cdot \frac{b_1}{b_2} \cdot \frac{c_1}{c_2}.$$

Wówczas odcinki AP , BQ , CR mają punkt wspólny wtedy i tylko wtedy, gdy $s = 1$.

Teza twierdzenia jest prawdziwa również, gdy jeden z punktów P , Q , R należy do boku trójkąta, a pozostałe dwa leżą na przedłużeniach odpowiednich boków. Tutaj ograniczę się jednak do przypadku wymienionego w twierdzeniu.

Dowód ($\Rightarrow$). Załóżmy najpierw, że odcinki AP , BQ , CR mają punkt wspólny K . Oznaczmy pola $[BKC]$, $[CKA]$, $[AKB]$ przez, odpowiednio, P_A , P_B , P_C . Jest jasne (wspólne wysokości), że $\frac{[ABP]}{[ACP]} = \frac{a_1}{a_2} = \frac{[KBP]}{[KCP]}$. Stosunki pól są równe, więc także $\frac{a_1}{a_2} = \frac{[ABP] - [KBP]}{[ACP] - [KCP]} = \frac{P_C}{P_B}$. Mnożąc tę równość z dwiema analogicznymi, otrzymamy tezę.

Trygonometryczne twierdzenie Cevy.

W trójkącie ABC leżą punkty P , Q , R na bokach, odpowiednio, BC , CA , AB . Przyjmijmy oznaczenia jak na rysunku i niech

$$t = \frac{\sin \alpha_1}{\sin \alpha_2} \cdot \frac{\sin \beta_1}{\sin \beta_2} \cdot \frac{\sin \gamma_1}{\sin \gamma_2}.$$

Wówczas odcinki AP , BQ , CR mają punkt wspólny wtedy i tylko wtedy, gdy $t = 1$.

Dowód. Uzgodnijmy, że $a = |BC|$, $b = |CA|$ i $c = |AB|$. Wystarczy udowodnić, że $s = t$. Zauważmy najpierw, że $\frac{a_1}{a_2} = \frac{[ABP]}{[ACP]} = \frac{\frac{1}{2}c|AP|\sin \alpha_1}{\frac{1}{2}b|AP|\sin \alpha_2} = \frac{c \sin \alpha_1}{b \sin \alpha_2}$. Mnożąc stronami tę równość przez dwie analogiczne, otrzymamy $s = t$.

Z tego twierdzenia można również korzystać dla samych trzech cięciw danego okręgu – wystarczy tylko miary odpowiednich kątów, długości boków są niepotrzebne. Sama równość

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{c \sin \alpha_1}{b \sin \alpha_2}$$

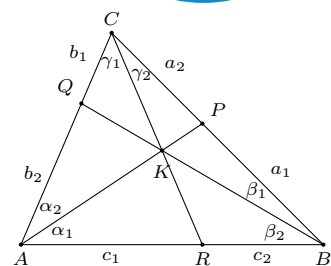
ma swoją wartość – można ją używać w twierdzeniu Cevy, zamieniając, wedle uznania, proporcje podziałów boków na ich trygonometryczną wersję.

Zadania

- Wykaż, że następujące czewiany w trójkącie ostrokątnym przecinają się w jednym punkcie: środkowe (w środku ciężkości), dwusieczne (w środku okręgu wpisanego), wysokości (w ortocentrum).
- Wykazać, że odcinki łączące punkty styczności okręgu wpisanego w trójkąt z przeciwległymi wierzchołkami przecinają się w jednym punkcie (punkt Gergonne'a).
- Udowodnić za pomocą twierdzenia Cevy, że w trapezie, niebędącym równoległobokiem, następujące punkty leżą na jednej prostej: środki podstaw, punkt przecięcia się przekątnych oraz punkt przecięcia się prostych zawierających ramiona trapezu.
- Częścią wspólną kwadratów $ABCD$ i $APQR$ jest odcinek AR . Wykazać, że proste BP , CQ i DR przecinają się w jednym punkcie.
- Dany jest trójkąt ostrokątny ABC . Punkt D jest spodkiem wysokości opuszczonej na bok CB , natomiast K jest dowolnym punktem wewnętrznym tej wysokości. Proste BK i CK przecinają odcinki AC i BC w punktach, odpowiednio, E i F . Udowodnić, że prosta AD jest dwusieczną kąta FDE . (Kanadyjska OM, 1994)
- Odcinki AD , BE i CF są wysokościami trójkąta ostrokątnego ABC i przecinają się w punkcie H . Punkty K , L , M leżą, odpowiednio, na odcinkach BC , CA , AB oraz

$$HK \perp EF, \quad HL \perp FD, \quad HM \perp DE.$$

Udowodnić, że odcinki AK , BL i CM przecinają się w jednym punkcie. (XIV WLM)



Twierdzenie Cevy

Dowód ($\Leftarrow$). Zakładamy, że $s = 1$. Przypuśćmy, że mimo tego odcinki AP , BQ , CR nie przecinają się w jednym punkcie. Niech AP i BQ przecinają się w punkcie K . Niech prosta CK przecina odcinek AB w punkcie $R' \neq R$. Z udowodnionej już implikacji ($\Rightarrow$) mamy równość $\frac{a_1}{a_2} \cdot \frac{b_1}{b_2} \cdot \frac{|AR'|}{|R'B|} = 1 = s$, z której wynika, że $\frac{|AR'|}{|R'B|} = \frac{c_1}{c_2}$. Jednak to jest niemożliwe, ponieważ punkty R i R' są różne.

Odcinki lub proste AP , BQ i CR nazywa się krótko **czewianami**. Twierdzenie Cevy można również wyrazić za pomocą kątów. Jest to

Wskazówki do zadań

- Dla środka ciężkości wystarczy klasyczna wersja twierdzenia Cevy. W przypadku dwusiecznych i wysokości odmianna trygonometryczna wygląda nieco korzystnie.
- Na początek wystarczy twierdzenie o styczności.
- Przydatny lemat (przy oznaczeniach o styczności).
- Odpowiednie proporcje dla trójkąta BRQ można znaleźć dzięki trygonometrii albo podobieństwu trójkątów ukrytemu w trapezach. Wygodnie jest odnosić wszystko do długości boków danych kwadratów.
- Poprowadźmy przez punkt A prostą $\ell \parallel BC$. Niech P i Q będą przecięciami prostych ℓ i, odpowiednio, prostych DE i DF . Z twierdzenia Talesa otrzymamy $|AQ| = \frac{|AF| \cdot |BD|}{|BF|}$ i analogiczną formułę na $|AP|$. Resztę załatwi twierdzenie Cevy dla trójkąta ABC .
- Na czworokącie $ABDE$ można opisać okrąg. Biorąc jako P punkt przecięcia prostych MH i DE (pod kątem prostym) i rachując na kątach, dojdziemy do równości $|\angle AHM| = |\angle BAC|$ oraz pędziwnosć zastosowaliśmy do trójkąta AHM i analogicznych, wystarcza do zastosowania twierdzenia Cevy kończącego dowód.