

nerwów składających się w gruby „kabel” nerwu wzrokowego. Jednak aby otrzymać precyzyjny obraz w układzie jednoreceptorowym, potrzebny jest solidny system przetwarzania, którego u małego skorupkiaka nie ma.

Proces ewolucji weryfikuje różnego rodzaju rozwiązania. Niektóre z nich znikły wraz z ginącymi gatunkami, o wielu nigdy się nie dowiemy. Czasem można jednak podejrzewać, jakie „pomysły” generuje natura. Wciąż trwają, choć nie rozwinęły się masowo i nie utrwały u wyższych organizmów. Co najważniejsze, widzenie *Copilia quadrata* oparte na skanowaniu z jej prostym układem nerwowym może nie dawać dobrej jakości obrazu, jednak wychwytuje ruch. Jest wystarczające dla tych niewielkich skorupkiaków, by uniknąć tego, co się rusza. Jest kluczowe do przeżycia, podobnie jak dla miliardów podobnych stworzeń nieustannie narażonych na pożarcie przez drapieżniki.

I dobrze, że system jest na tyle mocny, by przetrwać, a na tyle wadliwy, by zostać pożartym. Bo małe skorupkiaki i ich larwy stanowią krytyczny element w sieci pokarmowej wód. Olbrzymia obfitość tych stworzeń, związana z ich mizerną szansą na przeżycie, umożliwia rozkwit życia w innych, bardziej złożonych formach: stawonogów, gąbek, jamochłonów, mięczaków i ryb. A na końcu, pośrednio, ssaków. Także takich jak ja.

Marta FIKUS-KRYŃSKA

„The curious eye of *Copilia*”
Gregory R.L., Ross H.E. i Moray N.
Nature 201 (1964)



Zadania

Przygotował Arkadiusz HESS

F 1135. Częstka jest wyrzucona pionowo w górę z powierzchni Ziemi z prędkością wystarczającą, aby osiągnąć nieskończoną wysokość (zaniedbując opór powietrza). Udowodnij, że czas potrzebny do osiągnięcia wysokości h dany jest wzorem:

$$t = \frac{1}{3} \sqrt{\frac{2R}{g}} \left[\left(1 + \frac{h}{R} \right)^{3/2} - 1 \right],$$

R to promień Ziemi, a g przyspieszenie grawitacyjne na jej powierzchni.

[Źródło: *Newtonian Dynamics*, Richard Fitzpatrick.]

F 1136. Hydroniusz Kranowski postanowił wykonać w ogrodzie ciekawe doświadczenie. Zamierzał zmierzyć przepływ wody z kranu ogrodowego z wykorzystaniem jedynie linijki. Ustalił, że średnica przy miejscu wypływu ma $d_1 = 10$ mm, a w odległości $\Delta L = 0,5$ m od tego miejsca średnica strumienia wynosi $d_2 = 6$ mm. Pomóż Hydroniuszowi obliczyć natężenie przepływu wody Q w jednostkach m^3/s .

[Zadanie oraz grafika zaczerpnięte z książki: *100 prostych doświadczeń z wodą i powietrzem* Ryszarda Błażejewskiego.]

Przygotował Dominik BUREK

M 1840. Wielomian $x^3 + px^2 + qx + r$ ma trzy pierwiastki w przedziale $(0, 2)$. Udowodnić, że

$$-2 < p + q + r < 0.$$

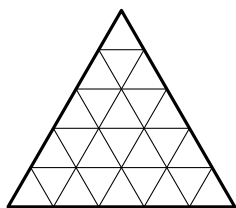
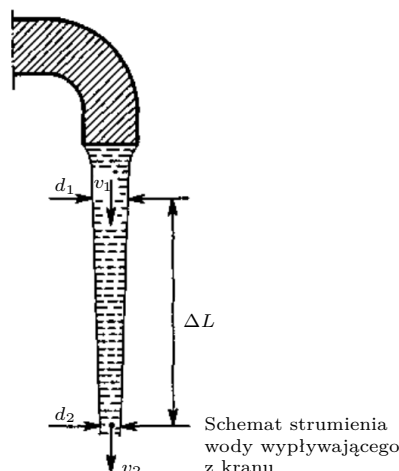
M 1841. Dana jest liczba całkowita dodatnia n taka, że

$$\text{nwd}(n, n+1) < \text{nwd}(n, n+2) < \dots < \text{nwd}(n, n+35).$$

Udowodnić, że

$$\text{nwd}(n, n+35) < \text{nwd}(n, n+36).$$

M 1842. Tabliczka czekolady w kształcie trójkąta równobocznego o boku długości p składa się z p^2 kostek, czyli kawałków w kształcie trójkąta równobocznego o bokach długości 1, równoległych do boków tabliczki czekolady. Dwóch graczy na zmianę może odłamać kawałek w kształcie trójkąta (łamiąc wzdłuż jednej z linii podziału czekolady na kostki). Gracz, który nie ma ruchu lub zostawi przeciwnikowi dokładnie jedną kostkę, przegrywa. Załóżmy, że p jest liczbą pierwszą. Który z graczy ma zwycięską strategię?



Rozwiązania na str. 24

Rozwiązania zadań ze strony 5



Rozwiązanie zadania M 1840.

Oznaczmy przez a , b i c pierwiastki wielomianu. Wtedy

$$x^3 + px^2 + qx + r = (x - a)(x - b)(x - c).$$

Wstawiając $x = 1$, mamy

$$1 + p + q + r = (1 - a)(1 - b)(1 - c).$$

Każda z liczb a , b i c leży w przedziale $(0, 2)$, zatem każda z liczb $1 - a$, $1 - b$, $1 - c$ leży ściśle pomiędzy w przedziale $(-1, 1)$. Wynika stąd, że iloczyn $(1 - a)(1 - b)(1 - c)$ również leży w przedziale $(-1, 1)$. Zatem

$$p + q + r = (1 - a)(1 - b)(1 - c) - 1$$

leży w przedziale $(-2, 0)$.



Rozwiązanie zadania M 1841.

Zauważmy, że dla dowolnej liczby całkowitej $k \geq 1$ mamy $\text{nwd}(n, n + k) \leq k$, gdyż jeśli liczba pierwsza p dzieli n i $n + k$, to dzieli również ich różnicę k . Wobec tego skoro $\text{nwd}(n, n + 1) = 1$ i $\text{nwd}(n, n + k)$ rośnie dla $k = 1, 2, \dots, 35$, to $\text{nwd}(n, n + k) = k$ dla $k = 1, 2, \dots, 35$. W szczególności oznacza to, że wszystkie liczby $1, 2, \dots, 35$ dzielą n , więc $36 = 4 \cdot 9$ również dzieli n , a zatem

$$\text{nwd}(n, n + 36) = 36 > 35 = \text{nwd}(n, n + 35).$$

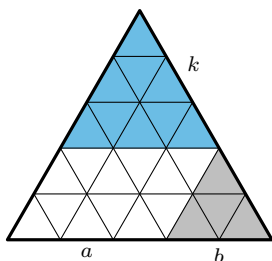


Rozwiązanie zadania M 1842.

Zwycięską strategię ma gracz drugi.

Pierwszego gracza oznaczmy przez A , drugiego przez B . Opiszemy teraz strategię wygrywającą dla B . Przypuśćmy, że A zjada kostkę wymiaru k , pozostawiając trapez o bokach k , $p - k$, p , $p - k$. Niech $a = \max(k, p - k)$, $b = \min(k, p - k)$. Ponieważ $\text{nwd}(a, b) = \text{nwd}(k, p - k) = 1$, więc $a \neq b$. Gracz B zjada zatem trójkąt o boku $p - k$, pozostawiając równoległobok o wymiarach a na b . Teraz rozpatrzymy dwa przypadki:

- Załóżmy, że A zjada kawałek o wymiarach mniejszych niż b , wtedy B zjada kawałek symetryczny względem środka równoległoboku i wygrywa, gdyż A w tym momencie nie ma ruchu.
- Jeśli zaś A zjada trójkąt o boku b , pozostawia trapez o bokach $a - b$, b , a , b , gdzie znowu $\text{nwd}(a - b, b) = \text{nwd}(a, b) = 1$. Gracz B , kontynuując swoją strategię, doprowadzi do sytuacji, w której $a = b = 1$ (gdyż $\text{nwd}(a, b) = 1$), co oznacza, że po ruchu A pozostaje ostatnia kostka, stąd B wygrywa.



Pytanie: Który z graczy ma wygrywającą strategię, jeśli bok czekolady jest liczbą złożoną?



Rozwiązanie zadania F 1135.

Rozważamy cząstkę wyrzuconą pionowo w górę z powierzchni Ziemi z prędkością ucieczki. Pomijamy opór powietrza. Zasada zachowania energii daje:

$$E = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{GMm}{r} = 0 \Rightarrow v(r) = \sqrt{\frac{2GM}{r}}.$$

Podstawiamy $GM = gR^2$, gdzie g to przyspieszenie ziemskie na powierzchni, a R to promień Ziemi:

$$v(r) = \sqrt{\frac{2gR^2}{r}}.$$

Aby obliczyć czas, jaki zajmuje cząstce osiągnięcie wysokości h , zauważamy, że prędkość nie jest stała – zmienia się wraz z odległością od środka Ziemi. Nie możemy więc użyć prostego wzoru $t = \frac{s}{v}$, ponieważ nie ma jednej prędkości dla całej drogi.

Zamiast tego dzielimy ruch na nieskończenie małe odcinki drogi dr , w których prędkość $v(r)$ można uznać za prawie stałą. Dla każdego takiego odcinka czas przebycia wynosi właśnie $dt = \frac{dr}{v(r)}$. Sumując te małe czasy dla wszystkich odcinków od $r = R$ do $r = R + h$, otrzymujemy całkowity czas ruchu jako właśnie całkę:

$$\begin{aligned} t &= \int_R^{R+h} \frac{dr}{v(r)} = \int_R^{R+h} \frac{dr}{\sqrt{\frac{2gR^2}{r}}} = \frac{1}{\sqrt{2gR^2}} \int_R^{R+h} \sqrt{r} dr \\ &= \frac{1}{\sqrt{2gR^2}} \cdot \left[\frac{2}{3} r^{3/2} \right]_R^{R+h} = \frac{2}{3\sqrt{2gR^2}} \left((R+h)^{3/2} - R^{3/2} \right) \end{aligned}$$

Zauważmy, że $(R+h)^{3/2} = R^{3/2} \left(1 + \frac{h}{R} \right)^{3/2}$, więc:

$$t = \frac{1}{3} \sqrt{\frac{2R}{g}} \left[\left(1 + \frac{h}{R} \right)^{3/2} - 1 \right].$$



Rozwiązanie zadania F 1136.

Przeanalizujemy sytuację wypływu wody z kranu (zobacz rysunek na s. 5). Na skutek działania siły grawitacji strumień wody przyspiesza w miarę oddalania się od wylotu. Zgodnie z zasadą ciągłości (jedną z postaci prawa zachowania masy) objętość przepływającej cieczy na jednostkę czasu pozostaje stała. Przykładowo dla dwóch przekrojów poprzecznych, oznaczonych jako 1-1 oraz 2-2, możemy zapisać:

$$(*) \quad Q = v_1 A_1 = v_2 A_2,$$

gdzie v_1 i v_2 to średnie prędkości przepływu cieczy w przekrojach o polach powierzchni, odpowiednio, A_1 oraz A_2 .

Choć dzisiaj równanie $(*)$ wydaje się oczywiste, zostało ono sformułowane dopiero w XVII wieku.

Dla cieczy idealnej (czyli takiej, w której można pominąć straty energii) równanie Bernoulliego zastosowane do przepływu między punktami 1-1 i 2-2 przyjmuje postać:

$$\frac{v_1^2}{2g} + \frac{p_1}{\rho_w g} + z_1 = \frac{v_2^2}{2g} + \frac{p_2}{\rho_w g} + z_2.$$

Zakładając, że ciśnienia w obu punktach są równe ($p_1 = p_2 = p_a$) oraz że różnica wysokości $z_1 - z_2 = \Delta L$, powyższe równanie upraszcza się do postaci:

$$\frac{v_1^2 - v_2^2}{2g} = -\Delta L.$$

Uwzględniając związek między prędkością a przepływem: $Q = vA = v\pi d^2/4$, ostateczny wzór na strumień objętościowy przyjmuje postać:

$$Q = \frac{\pi d_2^2 \sqrt{2g\Delta L}}{4\sqrt{(d_1/d_2)^4 - 1}}.$$

Zatem aby wyznaczyć natężenie przepływu, wystarczy zmierzyć trzy wielkości geometryczne: średnice strumienia w dwóch przekrojach oraz odległość między tymi przekrojami. Po podstawieniu danych liczbowych otrzymujemy natężenie $3,4 \cdot 10^{-5} \text{ m}^3/\text{s}$.