



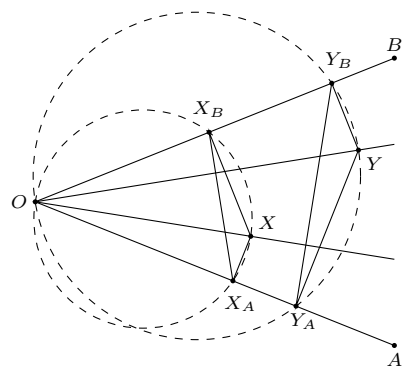
Punkty izogonalnie sprzężone

Bartłomiej BZDEGA

Uniwersytet im. A. Mickiewicza w Poznaniu

Przed przystąpieniem do lektury warto zapoznać się z trygonometrycznym twierdzeniem Cevy, do czego znakomicie nadaje się poprzedni kącik.

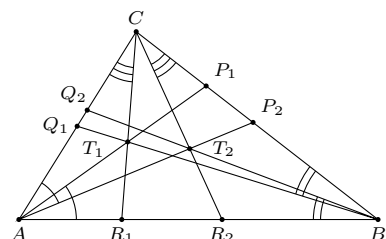
Rozważmy kąt wypukły AOB oraz punkty X i Y wewnątrz niego. Mówimy, że proste OX i OY są *izogonalnie sprzężone* względem tego kąta, jeśli $|\sphericalangle AOX| = |\sphericalangle BOY|$ (lub równoważnie: $|\sphericalangle AOY| = |\sphericalangle BOX|$).



Rys. 1

Twierdzenie 1. Rozważmy sytuację z pierwszego rysunku. Punkty X_A i X_B są rzutami prostokątnymi punktu X na ramiona kąta AOB ; analogicznie jest z Y_A i Y_B . Wówczas proste OX i OY są izogonalnie sprzężone względem kąta AOB wtedy i tylko wtedy, gdy na czworokącie $X_A Y_A Y_B X_B$ można opisać okrąg. W takiej sytuacji środkiem wspomnianego okręgu jest środek odcinka XY .

Dowód. Na czworokątach $OX_A X X_B$ i $OY_A Y Y_B$ można opisać okręgi (o średnicach OX i OY), więc mamy następujący ciąg równoważności: $|\sphericalangle AOX| = |\sphericalangle BOY| \Leftrightarrow |\sphericalangle X_A X X_B| = |\sphericalangle Y_B Y_A Y| \Leftrightarrow |\sphericalangle OX_B X_A| = |\sphericalangle OY_A Y_B| \Leftrightarrow$ na czworokącie $X_A Y_A Y_B X_B$ można opisać okrąg. Na koniec zaobserwujmy, że środek odcinka XY leży na symetralnych odcinków $X_A Y_A$ i $X_B Y_B$, ponieważ $X_A Y_A Y X$ i $Y_B X_B X Y$ są trapezami prostokątnymi. Z tego wnioskujemy, że jest to środek okręgu opisanego na czworokącie $X_A X_B Y_B Y_A$.



Rys. 2

Twierdzenie 2. Niech punkt T_1 będzie wspólnym punktem czewian AP_1, BQ_1 i CR_1 , a punkty P_2, Q_2, R_2 są wybrane w taki sposób, by proste AP_2, BQ_2, CR_2 były izogonalnie sprzężone z, odpowiednio, AP_1, BQ_1, CR_1 w kątach BAC, CBA, ACB . Przy powyższych założeniach odcinki AP_2, BQ_2, CR_2 również przecinają się w jednym punkcie (rysunek 2).

Dowód. Oznaczmy miary kątów trójkąta ABC przy wierzchołkach A, B, C , przez, odpowiednio, α, β, γ . Niech ponadto (są to kąty zaznaczone na rysunku 2):

$$\alpha_1 = |\sphericalangle BAP_1| = |\sphericalangle P_2AC|,$$

$$\beta_1 = |\sphericalangle CBQ_1| = |\sphericalangle Q_2BA|,$$

$$\gamma_1 = |\sphericalangle ACR_1| = |\sphericalangle R_2CB|.$$

oraz $\alpha_2 = \alpha - \alpha_1$; analogicznie β_2 i γ_2 . Skorzystamy z trygonometrycznego twierdzenia Cevy. Dla czewian AP_1, BQ_1, CR_1 oraz, odpowiednio, dla czewian AP_2, BQ_2, CR_2 otrzymujemy

$$t_1 = \frac{\sin \alpha_1}{\sin \alpha_2} \cdot \frac{\sin \beta_1}{\sin \beta_2} \cdot \frac{\sin \gamma_1}{\sin \gamma_2}, \quad t_2 = \frac{\sin \alpha_2}{\sin \alpha_1} \cdot \frac{\sin \beta_2}{\sin \beta_1} \cdot \frac{\sin \gamma_2}{\sin \gamma_1}.$$

Zwróćmy uwagę, że powyższe wzory pozostają prawdziwe niezależnie od wyboru czewian AP_1, BQ_1, CR_1 wewnątrz trójkąta ABC . Ponieważ $t_1 t_2 = 1$, mamy $t_1 = 1 \Leftrightarrow t_2 = 1$, co kończy dowód.

W tej sytuacji punkty T_1 i T_2 nazywamy izogonalnie sprzężonymi w trójkącie ABC . Oto kilka słynnych par takich punktów: środek okręgu wpisanego ze sobą, środek okręgu opisanego z ortocentrum, środek ciężkości z punktem Lemoine'a, punkt Gergonne'a z punktem Nagela, punkty Brocarda jeden z drugim.

Zadania

- Wykazać, że punkty T_1 i T_2 są sprzężone izogonalnie w trójkącie ABC wtedy i tylko wtedy, gdy rzuty prostokątne punktów T_1 i T_2 na boki trójkąta ABC (łącznie 6 punktów) leżą na jednym okręgu, którego środek pokrywa się ze środkiem odcinka $T_1 T_2$.
- Znaleźć związek zadania 1 z okręgiem dziewięciu punktów.
- Dany jest trójkąt ABC , w którym $|\sphericalangle ABC| > 90^\circ$. Punkty P i Q leżą na symetralnej odcinka AB , wewnątrz kąta ACB , przy czym $|\sphericalangle ACP| = |\sphericalangle BCQ|$. Dowieść, że $|\sphericalangle PAC| + |\sphericalangle QBC| = 180^\circ$. (Obóz OM, 2004)
- Na bokach trójkąta ABC zbudowano, po jego zewnętrznej stronie, prostokąty $ABDE, BCGF, CAHI$. Udowodnić, że symetralne odcinków DF, GI, HE przecinają się w jednym punkcie. (Obóz OM, 2004)

Wskazówki do zadań

- Wykazać, że punkty T_1 i T_2 są sprzężone izogonalnie w trójkącie ABC wtedy i tylko wtedy, gdy rzuty prostokątne punktów T_1 i T_2 na boki trójkąta ABC (łącznie 6 punktów) leżą na jednym okręgu, którego środek pokrywa się ze środkiem odcinka $T_1 T_2$.
- Znaleźć związek zadania 1 z okręgiem dziewięciu punktów.
- Dany jest trójkąt ABC , w którym $|\sphericalangle ABC| > 90^\circ$. Punkty P i Q leżą na symetralnej odcinka AB , wewnątrz kąta ACB , przy czym $|\sphericalangle ACP| = |\sphericalangle BCQ|$. Dowieść, że $|\sphericalangle PAC| + |\sphericalangle QBC| = 180^\circ$. (Obóz OM, 2004)
- Na bokach trójkąta ABC zbudowano, po jego zewnętrznej stronie, prostokąty $ABDE, BCGF, CAHI$. Udowodnić, że symetralne odcinków DF, GI, HE przecinają się w jednym punkcie. (Obóz OM, 2004)