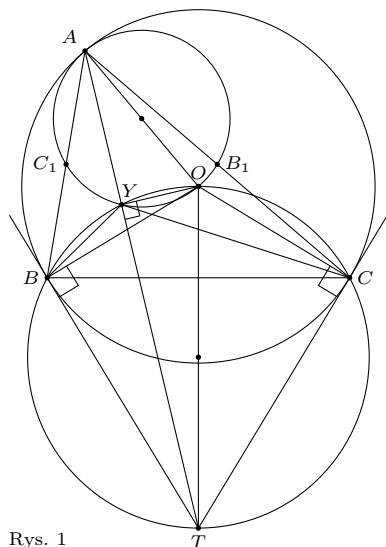
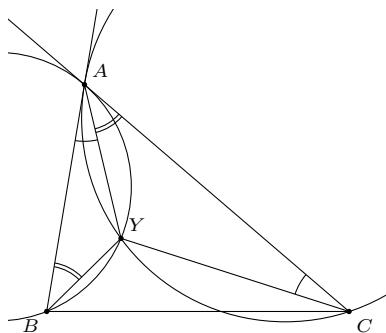




Rys. 1



Rys. 2

1. Jest to okrąg o średnicy OL ; L jest punktem Lemoine'a (punktem przecięcia trzech symedian).
2. Zachodzą równości: $|xDBA| = |xDA| = |xACA|$, więc punkt D_A leży na prostej BD .
3. Starczy wykazać, że punkty A, M, N , na CE , a zatem $F = D_A$.
4. Niech M będzie środkiem odcinka B_1C_1 . Rozważmy symetrię względem prostej B_1C_1 – przeprowadza ona punkt A' w A oraz punkt M w siebie. Korzystając z tego, że punkty A, B_1, C_1 , D_A leżą na jednym okręgu, można wykazać, że obraz punktu D_A w tej symetrii jest punktem A -Humpty trójkąta AB_1C_1 .
5. Mamy tu $M = D_A$ i $N = H_A$, z czego można wywnioskować, że $\triangle AYC \sim \triangle ABM$ (kk), więc $|AM| \cdot |AY| = |AB| \cdot |AC|$. Analogicznie dowodzimy, że $|AN| \cdot |AX| = |AB| \cdot |AC|$.

Wskazówki do zadań

... Dumpty

Bartłomiej BZDEGA

Uniwersytet im. A. Mickiewicza w Poznaniu

Czytelnikom, którzy nie przeczytali dwóch poprzednich kącików, polecam uczynić to przed przystąpieniem do lektury bieżącego. Opisane są tam wszystkie definicje i oznaczenia (standardowe dla trójkąta ABC) oraz własności punktu Humpty, które potrzebne będą i tutaj. Teraz kolej na punkt Dumpty, bliźniaka Humpty'ego.

Tak jak poprzednio, ograniczę się do trójkąta ostrokątnego, ale opisane tu fakty można uogólnić na ciekawsze trójkąty.

Rozważmy trójkąt ABC . Prosta izogonalnie sprzężoną w trójkącie ABC (por. Δ_{26}^1) do środkowej poprowadzonej z wierzchołka A nazwiemy A -symedianą. Jedną z jej podstawowych własności jest to, że przechodzi ona przez punkt wspólny stycznych do $\odot(ABC)$ w punktach B i C . Uzasadnienie można znaleźć w artykule Jerzego Bednarczuka w Δ_{16}^5 (twierdzenie 4).

Twierdzenie 1. Każda z poniższych definicji określa jednoznacznie ten sam punkt Y :

- (1) rzut prostokątny punktu O na A -symedianę trójkąta ABC ;
- (2) różny od O punkt przecięcia $\odot(AO)$ i $\odot(BCO)$ (lub punkt O , jeśli te okręgi są styczne);
- (3) punkt Y spełniający równości: $|x_BAY| = |x_ACY|$ i $|x_CAY| = |x_ABY|$;
- (4) punkt Y , dla którego $\odot(ABY)$ i $\odot(ACY)$ są styczne, odpowiednio, do prostych AC i AB .

Dowód. Niech T będzie punktem przecięcia stycznych do $\odot(ABC)$ w punktach B i C . Z faktu $|x_OBT| = |x_OCT| = 90^\circ$ wnioskujemy, że $\odot(BCO) = \odot(OT)$ (rys. 1).

(1) $\Leftrightarrow$ (2). Rzut prostokątny punktu O na prostą AT i drugi punkt wspólny okręgów $\odot(AO)$ i $\odot(OT)$ to ten sam punkt.

(1,2) $\Rightarrow$ (3). Niech $\gamma = |x_BCA|$ i $\varphi = |x_BAY|$. Najpierw zauważmy, że $|x_ABT| = 180^\circ - \gamma$. Stąd $|x_BCY| = |x_BTY| = \gamma - \varphi$, co daje $|x_ACY| = \varphi$. Drugiej równości kątów dowodzimy analogicznie.

(3) $\Rightarrow$ (1). Niech $\varphi = |x_BAY| = |x_ACY|$ i $\psi = |x_CAY| = |x_ABY|$ oraz $\alpha = |x_BAC|$. Widzimy, że $\varphi + \psi = \alpha$, co daje $|x_BYC| = 2\alpha = |x_BOC|$, więc punkt Y leży na $\odot(BCO) = \odot(OT)$, co daje $|x_OYT| = 90^\circ$. Dalej zauważmy, że $|x_AYB| = 180^\circ - \alpha$ oraz $|x_BYT| = |x_BCT| = \alpha$, więc punkty A, Y, T leżą na jednej prostej, co wobec $OY \perp YT$ dowodzi (1).

(3) $\Leftrightarrow$ (4) Równoważność wynika z obustronnego twierdzenia o stycznej i cięciwie (rys. 2).

Punkt Y , spełniający którąkolwiek (a zatem i wszystkie) spośród definicji (1)–(4), nazywamy punktem A -Dumpty trójkąta ABC . Będziemy go oznaczać D_A , analogicznie definiujemy punkty D_B i D_C . A na deser:

Twierdzenie 2. Punkty A -Humpty i A -Dumpty są izogonalnie sprzężone w trójkącie ABC (analogicznie H_B z D_B oraz H_C z D_C).

Dowód. Jako definicję punktu H_A przyjmijmy (3) z twierdzenia w poprzednim kąciku. Punkt Y izogonalnie sprzężony z H_A spełnia równości kątów (3) w twierdzeniu 1, w kąciku bieżącym. Ponieważ – w myśl tego samego twierdzenia – istnieje dokładnie jeden taki punkt, musi być $Y = D_A$.

Zadania

1. Udowodnić, że w trójkącie ostrokątnym ABC punkty D_A, D_B, D_C oraz O leżą na jednym okręgu.
2. Symetralne odcinków AB i CA przecinają środkową AA_1 trójkąta ostrokątnego ABC w punktach, odpowiednio, D i E . Proste BD i CE przecinają się w punkcie F . Wykazać, że punkty A, B_1, C_1 i F leżą na jednym okręgu. (USAMO 2008)
3. Niech P będzie dowolnym punktem na boku BC trójkąta ABC . Punkty M i N leżą, odpowiednio, na prostych AB i AC , przy czym $PM \parallel AC$ i $PN \parallel AB$. Udowodnić, że okrąg opisany na trójkącie AMN przechodzi przez stały punkt różny od A , niezależnie od wyboru punktu P .
4. Dowieść, że w trójkącie ostrokątnym ABC o wysokości AA' prosta $A'D_A$ przechodzi przez środek odcinka B_1C_1 .
5. Trójkąt ABC jest ostrokątny. Okręgi $\odot(AO)$ i $\odot(BCO)$ przecinają się w punkcie M , a okręgi $\odot(AH)$ i $\odot(BCH)$ – w punkcie N . Proste AM i AN przecinają po raz drugi, odpowiednio, $\odot(BCO)$ w punkcie X i $\odot(BCH)$ w punkcie Y . Udowodnić, że $MN \parallel XY$. (ELMO 2014)