

Klub 44 F

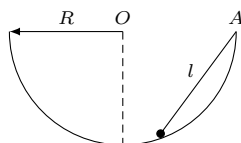


Termin nadsyłania rozwiązań: 30 VI 2026

Zadania z fizyki nr 816, 817

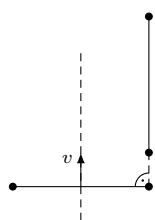
Redaguje Elżbieta ZAWISTOWSKA

816. Wahadło matematyczne o długości l przyczepione jest w punkcie A z wewnętrznej strony doskonale gładkiej półsfery o promieniu R (rys. 1). Punkt A znajduje się na okręgu o promieniu R , oś symetrii półsfery jest pionowa. Zakładamy, że $l < R\sqrt{2}$. Znaleźć częstość małych drgań wahadła po wewnętrznej powierzchni półsfery.



Rys. 1

817. Na gładkiej poziomej płaszczyźnie znajdują się dwa jednakowe hantle, przedstawione na rysunku 2. Każdy z nich składa się z cienkiego nieważkiego pręta o długości l , do którego końców przymocowane są jednakowe masywne kulki o zaniedbywalnych rozmiarach. Jeden z hantli spoczywa, drugi porusza się ruchem postępowym z prędkością v , skierowaną równolegle do hantla spoczywającego. Z jaką prędkością zaczną poruszać się nieruchomy hantel po zderzeniu sprężystym?

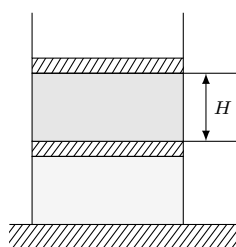


Rys. 2

Rozwiązania zadań z numeru 12/2025

Przypominamy treść zadań:

808. Pionowe naczynie zawiera dwie porcje gazu w stanie równowagi oddzielone od siebie i otaczającej przestrzeni dwoma jednakowymi ciężkimi tłokami (rys. 3). W górnej części naczynia znajduje się tlen, w dolnej hel. Na zewnątrz naczynia jest próżnia, gaz nie oddaje ciepła do otoczenia. Przewodnictwo cieplne tłoka rozdzielającego naczynia jest bardzo małe. Na początku objętości gazów są jednakowe, a odległość między tłokami wynosi H . Hel jest wolno ogrzewany i jego objętość rośnie dwukrotnie. Jaka będzie odległość między tłokami po długim czasie, gdy osiągnięty zostanie ponownie stan równowagi? Ciepło przekazywane do górnej części naczynia w czasie ogrzewania możemy zaniedbać.



Rys. 3

809. W ustalonym położeniu obiektywu w aparacie fotograficznym głębia ostrości obejmuje zakres odległości przedmiotów od $d_1 = 15$ m do $d_2 = 30$ m. Po zmniejszeniu otworu przesłony dolna granica głębi ostrości osiągnęła wartość $d'_1 = 10$ m. Znaleźć jej górną granicę.

808. Oznaczmy liczbę moli i ciśnienie gazu w górnym naczyniu przez n_1, p_1 , a w górnym przez n_2, p_2 . Stan początkowy przed ogrzewaniem jest stanem równowagi: $T_1 = T_2 = T$. Ciężar gazu między ciężkimi tłokami możemy zaniedbać: $p_1 = Mg/S, p_2 = Mg/S + p_1 = 2Mg/S \Rightarrow p_2 = 2p_1$, gdzie M jest masą tłoka, a S jego przekrojem. Z równań Clapeyrona: $p_1 HS = n_1 RT, p_2 HS = n_2 RT$, stąd $n_2 = 2n_1$. Podczas ogrzewania ciśnienie w obu częściach nie zmienia się. Ogrzewanie jest izobaryczne, zatem temperatura w dolnej części naczynia rośnie dwukrotnie. Oznaczmy szukaną odległość między tłokami przez x , temperaturę końcową w obu częściach naczynia przez T' . Energia końcowa jest sumą energii potencjalnych tłoków i energii wewnętrznych gazów: $E_2 = Mgx + 2Mgx + n_1 c_{V1} T' + n_2 c_{V2} T'$, gdzie $c_{V1} = 5R/2, c_{V2} = 3R/2$. Po skorzystaniu z równań Clapeyrona $E_2 = 17Mgx/2$. Energia po zakończeniu ogrzewania $E_1 = 5MgH + 5n_1 RT/2 + 3n_2 R(2T)/2 = 27MgH/2$. Układ jest izolowany cieplnie od otoczenia, zatem $E_1 = E_2$. Ostatecznie:

$$x = 27H/17.$$

809. Oznaczmy minimalny rozmiar rozróżnialnych szczegółów obrazu na matrycy aparatu przez a , średnicę odsłoniętej części obiektywu przez D , a jego ogniskową przez f . Jeżeli aparat został ustawiony na przedmiot umieszczony w odległości d od niego, matryca odległa jest od obiektywu o $y: y = fd/(d - f)$. Przedmiot ustawiony w odległości $d_1 < d$ da ostry obraz w odległości $y_1 = d_1 f / (d_1 - f)$, przy czym obrazem każdego punktu tego przedmiotu będzie kółko na matrycy (rys. 4). Podobnie będzie dla przedmiotów w odległości $d_2 > d$. Jeżeli średnica kółka nie przekroczy rozmiaru a , nie zauważymy braku ostrości. Z rysunku (4) mamy $a/D = (y_1 - y)/y_1 = (y - y_2)/y_2$ a stąd

$$(1) \quad 2/y = 1/y_1 + 1/y_2.$$

Jeżeli średnica obiektywu wynosi D' , to

$$(2) \quad 2/y = 1/y'_1 + 1/y'_2, \quad \text{gdzie } y'_1 = d'_1 f / (d'_1 - f), y'_2 = d'_2 f / (d'_2 - f).$$

Z (1) i (2):

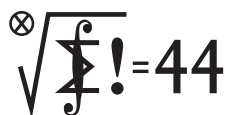
$$1/y'_2 = 1/y_1 + 1/y_2 - 1/y'_1, \quad d'_2 = 1/(1/d_1 + 1/d_2 - 1/d'_1) = \infty.$$

Dalsza granica głębi ostrości leży w nieskończoności, i na matrycy powstają akceptowalnie ostre obrazy przedmiotów położonych dalej niż 10 m od obiektywu.

Czołówka ligi zadaniowej **Klub 44 F**
po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań
802 ($WT = 1,68$), 803 ($WT = 2,58$)
z numeru 9/2024

Jan Zambrzycki	Białystok	4–41,78
Jacek Konieczny	Poznań	41,41
Andrzej Nowogrodzki		
	Chocianów	3–35,53
Ryszard Woźniak	Kraków	34,50
Paweł Perkowski	Ożarów Maz.	6–33,93
Krzysztof Zygan	Lubin	31,15
Tomasz Wietecha	Tarnów	18–25,90
Paweł Kubit	Kraków	20,47
Marian Łupieżewicz	Gliwice	3–16,17

Klub 44 M



Termin nadsyłania rozwiązań: 30 VI 2026

Czołówka ligi zadaniowej **Klub 44 M**
po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań
905 ($WT = 1,01$) i 906 ($WT = 2,37$)
z numeru 9/2025

Szymon Kitowski	47,30
Barbara Mroczek	46,43
Andrzej Sudół	45,47
Mikołaj Znamierowski	44,06
Michał Adamaszek	40,68
Marian Łupieżowiec	39,55
Stanisław Bednarek	38,25
Krzysztof Kamiński	38,09
Roksana Słowik	37,51
Mikołaj Pater	32,46

Taki moment to radość dla organizatorów Ligi! Bywało, że przez wiele miesięcy linie mety przekraczali, którzy już raz, tylko starzy wyjadacze. A tu, proszę: Szymon Kitowski, Barbara Mroczek, Andrzej Sudół, Mikołaj Znamierowski – cztery nowe twarze (!) w matematycznym Klubie 44.

911. Przyjmijmy, że dany prostokąt ma m wierszy, ponumerowanych $1, \dots, m$, oraz n kolumn, ponumerowanych $1, \dots, n$. Pola o obu współrzędnych nieparzystych malujemy na czarno – łącznie $\frac{m}{2} \cdot \frac{n+1}{2}$ pól. Rozważmy parkietaż z użyciem p płytek typu L oraz q płytek typu N . Zauważmy, że każda płytka nakrywa co najwyżej jedno czarne pole; stąd wniosek, że

$$p + q \geq \frac{1}{4} m(n+1), \quad \text{czyli} \quad 4q \geq mn + m - 4p.$$

Płytki dokładnie pokrywają cały prostokąt, wobec czego

$$\begin{aligned} mn &= 3p + 4q \geq 3p + (mn + m - 4p) \\ &= mn + m - p. \end{aligned}$$

Dostajemy oszacowanie: $p \geq m$.

Równość $p = m$ daje się uzyskać wieloma sposobami. Przykładowo: zadany prostokąt kroimy na $m/2$ pasków o wysokości 2 i długości n . W każdym takim pasku przy lewym i prawym końcu umieszczamy po jednej płytce typu L , zaś figurę, która między nimi pozostaje, uzupełniamy płytkami typu N i mamy parkietaż z użyciem $(m/2) \cdot 2$ płytek typu L .

Stąd odpowiedź: minimalna liczba płytek typu L wynosi m .

Skrót regulaminu

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru n w terminie do końca miesiąca $n + 2$. Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze $n + 4$. Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przysyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**. Można je przysyłać również pocztą elektroniczną pod adresem delta@mimuw.edu.pl (preferujemy pliki pdf). Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez

Zadania z matematyki nr 919, 920

Redaguje Marcin E. KUCZMA

919. W trzech pojemnikach rozmieszczone są fasolki (skończenie wiele). Wykonujemy ciąg ruchów. W jednym ruchu wybieramy dwa pojemniki; zawartość tego, w którym jest mniej fasolek, podwajamy, przesypując odpowiednią ilość fasolek z tego, w którym jest więcej (gdy jest po równo, wybór jest dowolny). Udowodnić, że niezależnie od rozmieszczenia początkowego można – iterując to postępowanie – opróżnić jeden z pojemników.

920. Niech $r(u, v) = \frac{1}{2}(u + v) - (uv)^{1/2}$ dla $u, v \geq 0$. Dowieść, że dla każdej trójki liczb rzeczywistych $a, b, c \geq 0$ zachodzi nierówność

$$\frac{1}{3}(a + b + c) - (abc)^{1/3} \leq 2 \cdot \max\{r(a, b), r(b, c), r(c, a)\}.$$

Zadanie 920 zaproponował pan Paweł Kubit z Krakowa.

Rozwiązania zadań z numeru 12/2025

Przypominamy treść zadań:

911. Dane są liczby naturalne m (parzysta), n (nieparzysta); $n \geq 3$. Prostokąt o bokach długości m, n , podzielony na mn pól (kwadratów jednostkowych) należy pokryć płytkami dwóch typów L i N , nakrywającymi (odpowiednio) trzy oraz cztery pola: płytka typu L to kwadrat 2×2 z usuniętym jednym polem; płytka typu N to prostokąt 3×2 z usuniętymi dwoma przeciwległymi polami narożnymi (dotykającymi końców przekątnej prostokąta 3×2). Płytki mogą być dowolnie obracane, ale nie mogą na siebie nachodzić ani wystawać poza obręb danego prostokąta $m \times n$. Wyznaczyć minimalną liczbę płytek typu L , jaka może być użyta w takim parkietażu.

912. W czworoboku $ABCD$ krawędzie AB i CD są równej długości, a prosta przechodząca przez środki tych krawędzi jest prostopadła do każdej z nich. Udowodnić, że dla każdej liczby $r > 0$ istnieje sfera o promieniu r taka, że dla wszystkich punktów P , leżących na tej sferze, suma $PA^2 + PB^2 + PC^2 + PD^2$ ma jednakową wartość.

912. Oznaczmy przez O środek odcinka MN , łączącego środki M i N krawędzi (odpowiednio) AB i CD . Skoro $AB = CD$ oraz $MO = NO$, trójkąty prostokątne AMO, BMO, CNO, DNO są przystające; ich przeciwprostokątne OA, OB, OC, OD mają jednakową długość – oznaczmy ją przez R . Wektory

$$\mathbf{v}_1 = \overrightarrow{OA}, \quad \mathbf{v}_2 = \overrightarrow{OB}, \quad \mathbf{v}_3 = \overrightarrow{OC}, \quad \mathbf{v}_4 = \overrightarrow{OD}$$

(długości R) w sumie dają wektor zerowy:

$$(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2) + (\mathbf{v}_3 + \mathbf{v}_4) = 2\overrightarrow{OM} + 2\overrightarrow{ON} = \mathbf{0}.$$

Dla dowolnie ustalonego $r > 0$ bierzemy sferę o środku O i promieniu r . Ma ona wymaganą własność: bowiem jeśli P jest dowolnie wybranym punktem leżącym na niej, to – oznaczając $\overrightarrow{OP} = \mathbf{p}$ (tak, że $\mathbf{p}^2 = r^2$) – dostajemy równość:

$$\begin{aligned} PA^2 + PB^2 + PC^2 + PD^2 &= \sum_{i=1}^4 (\mathbf{v}_i - \mathbf{p})^2 \\ &= \sum_{i=1}^4 \mathbf{v}_i^2 - 2 \left(\sum_{i=1}^4 \mathbf{v}_i \right) \cdot \mathbf{p} + 4\mathbf{p}^2 \\ &= 4R^2 + 4r^2. \end{aligned}$$

Uzyskana wartość nie zależy od wyboru punktu P na sferze (O, r) .

współczynnik trudności danego zadania: $WT = 4 - 3S/N$, przy czym S oznacza sumę ocen za rozwiązania tego zadania, a N – liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (**M** lub **F**) – i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu 44 punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (**M** lub **F**), zostaje on członkiem **Klubu 44**, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo – to tytuł **Weterana**. Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 2/2002 oraz znajduje się na stronie deltami.edu.pl.