

O kolorowaniu liczb naturalnych, czyli jak van der Waerden wachlarze projektował

Paweł SAWICKI*

*Doktorant, Wydział Matematyki, Fizyki
i Informatyki, Uniwersytet Gdański

Główną motywacją niniejszego artykułu jest opowiedzenie o następującym twierdzeniu:

Twierdzenie 1 (Bartel Leendert van der Waerden, 1927). *Jeżeli pokolorujemy liczby naturalne skończoną liczbą barw, będą istnieć jednobarwne ciągi arytmetyczne każdej skończonej długości.*

Trzeba przyznać, że teza jest zaskakująca, wiele osób mogłoby ją intuicyjnie uznać za błędną – trudno się przecież spodziewać, że zbiory, o których niemal nic pewnego nie wiemy, będą miały tak dobrze uporządkowane podzbiory. Jej prawdziwość jest jednym z fundamentalnych wyników gałęzi kombinatoryki znanej jako *teoria Ramseya*. Dowód postaramy się przedstawić tak, aby jasne były powody wykonania kolejnych kroków, bez wyciągania „królików z kapelusza”. Linia rozumowania jest zaczerpnięta z artykułu Terence’a Tao *The ergodic and combinatorial approaches to Szemerédi’s theorem*. Dla wygody, przez m -kolorowanie rozumiemy kolorowanie m kolorami, ponadto zbiór liczb naturalnych będziemy standardowo oznaczać przez $\mathbb{N}$.

Wykażemy następujące, pozornie silniejsze, sformułowanie problemu:

Twierdzenie 2. *Dla dowolnych $k, m \geq 1$ istnieje taka liczba naturalna N , że każde m -kolorowanie N kolejnych liczb naturalnych zawiera jednobarwny ciąg arytmetyczny długości k .*

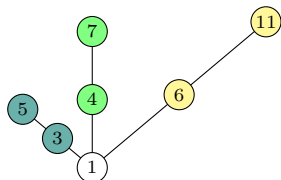
Teraz dużo lepiej widać, że narzucającą się metodą ataku jest zastosowanie podwójnej indukcji po k i m . Obiecujące wydaje się, by „zewnątrzna” indukcja była po długości ciągu. Bazę indukcji otrzymujemy za darmo: trywialne jest, że teza zachodzi dla $k = 1$ (a nawet dla $k = 2$). Pozostaje nam wykonanie kroku indukcyjnego: wiedząc, że każde skończone kolorowanie dostatecznie wielu kolejnych liczb naturalnych zawiera ciąg arytmetyczny długości $k - 1$ (założenie indukcyjne), pragniemy to samo udowodnić dla k .

Przechodzimy teraz do indukcji względem liczby barw m („wewnętrzna” indukcja). Niestety nie widać, w jaki sposób przeprowadzić krok indukcyjny. Żadne trywialne rozumowanie nie pozwala wnioskować, że po odpowiednim wydłużeniu przedziału dodanie nowego koloru nie zmniejszy długości istniejących w nim ciągów arytmetycznych. Tutaj z pomocą przychodzi rdzeń pomysłu van der Waerdena, który można by nazwać *wzbogaceniem* czy też *odświeżeniem* tezy indukcyjnej. Ta metoda sprowadza się do tego, żeby zdefiniować strukturę, której istnienia będzie można dowodzić jako alternatywy dla tej żądanej w pierwotnym sformułowaniu tezy. Nowa struktura powinna dawać się łatwiej rozbudowywać w kroku indukcyjnym. Z drugiej strony, nie może istotnie osłabiać twierdzenia, a zatem jest pożądane, aby była kluczową „cegiełką” w konstrukcji oryginalnej struktury czy też czymś pośrednim pomiędzy dwiema takimi strukturami. Z tej perspektywy źródło idei van der Waerdena jest już dosyć jasne – staramy się znaleźć konstrukcję zawierającą konkretny punkt, którego malowanie wymaga albo wydłużenia jednokolorowego ciągu, albo wprowadzenia nowej barwy:

Definicja 1 (Wachlarz van der Waerdena). *Wachlarz o promieniu r i stopniu d składa się z bazy $a \in \mathbb{N}$ oraz d parami rozłącznych szprych. Dla $1 \leq j \leq d$, j -ta szprycha to ciąg arytmetyczny $a + b_j, a + 2b_j, \dots, a + (r - 1)b_j$. Wachlarz nazywamy *polichromatycznym*, gdy każda jego szprycha jest jednobarwna, a baza ma kolor inny od każdej ze szprych.*

W tym miejscu możemy założyć prawdziwość „zewnątrznej” hipotezy indukcyjnej (dla dowolnego $m' \in \mathbb{N}$ istnieje $N = N(k - 1, m')$ takie, że każde m' -kolorowanie przedziału długości N zawiera ciąg arytmetyczny długości $k - 1$).

Tak naprawdę oba sformułowania są równoważne, jednak implikacja „w dół” jest mniej oczywista. Tym, którzy sami chcieliby ją przeprowadzić, polecamy zapoznanie się z *lematem Kőniga*.



Ilustracja polichromatycznego wachlarza o promieniu 2 i stopniu 3

Odpowiedź na pytanie z artykułu

Pewny strzał w ciemno: Zaczniemy od wytłumaczenia, dlaczego studenci mogą zagwarantować $\lfloor \frac{n}{k} \rfloor$ prawidłowych odpowiedzi. Bez straty ogólności przyjmijmy, że oceny są liczbami całkowitymi $1, 2, \dots, k$. Studenci dzielą się na k możliwie równolicznych grup, tzn. każda grupa ma liczyć co najmniej $\lfloor \frac{n}{k} \rfloor$ osób. Studenci z grupy o numerze i zakładają, że reszta z dzielenia sumy wszystkich ocen przez k jest równa i (k -ta grupa przyjmuje oczywiście resztę 0). Takie założenie oraz znajomość ocen pozostałych jednoznacznie wskazuje każdemu studentowi odpowiedź na pytanie o jego ocenę. Ponieważ któraś grupa musiała przyjąć słuszne założenie, warunek zostaje spełniony. Zauważmy teraz, że każdy student podejmuje decyzję na podstawie jednego z k^{n-1} możliwych ciągów ocen, jaki ów student „widzi”. W tej sytuacji dla każdego studenta istnieje $(k-1)k^{n-1}$ konfiguracji wszystkich ocen (w tym jego), przy których podejmuje on złą decyzję. Ponieważ wszystkich studentów jest n oraz mamy k^n możliwych ciągów wszystkich ocen, więc pewien ciąg ocen jest na liście „złych ciągów” u co najmniej $\lceil \frac{n(k-1)k^{n-1}}{k^n} \rceil = \lceil \frac{k-1}{k} n \rceil$ studentów. Oznacza to, że przy takim ciągu ocen prawidłowej odpowiedzi udziela co najwyżej $n - \lceil \frac{k-1}{k} n \rceil = \lfloor \frac{n}{k} \rfloor$ studentów.

„Wewnętrzna” indukcja względem liczby barw zostaje zastąpiona przez poniższe stwierdzenie dowodzone przez indukcję względem stopnia wachlarza:

Twierdzenie 3. *Dla dowolnego $d \geq 0$ oraz $m \geq 1$ istnieje takie $N(k, m, d) \in \mathbb{N}$, że każde m -kolorowanie $N(k, m, d)$ kolejnych liczb naturalnych zawiera jednobarwny ciąg arytmetyczny długości k albo wachlarz polichromatyczny stopnia d o promieniu k .*

Jasne jest, że to sformułowanie nam wystarczy, skoro po dojściu do $d = m$ zabraknie barw, by istniał wachlarz polichromatyczny żadanego stopnia, co od razu implikuje prawdziwość zewnętrznej tezy indukcyjnej. Nie ma też kłopotu z bazą indukcji, wachlarz stopnia 0 składa się z jednej liczby (bazy), wystarczy zatem wziąć $N(k, m, 0) = 1$. Trzeba teraz znaleźć sposób, żeby w kroku indukcyjnym rozbudować wachlarz o jedną szprychę. W tym celu wykorzystamy podejście nieco podobne do argumentu przekątniowego Cantora. Otóż dowodząc dla danej wartości d , wiemy z założenia indukcyjnego, że każdy przedział długości $N(k, m, d-1)$ zawiera ciąg arytmetyczny długości k albo wachlarz polichromatyczny stopnia $d-1$ o promieniu k . Możemy założyć bez utraty ogólności, że istotnie każdy taki przedział zawiera taki wachlarz, gdyż w przeciwnym razie teza potwierdza się natychmiast. Technika, której chcemy użyć, polega na łączeniu mniejszych struktur w jedną większą, wobec czego trzeba teraz zbadać kolekcję wielu takich przedziałów z wieloma wachlarzami.

Oznaczmy $P = N(k, m, d-1)$. Posłużymy się pewnym trikiem: istnieje tylko skończenie wiele sposobów (mianowicie m^P), żeby pomalować przedział długości P przy użyciu m kolorów. Każdemu z tych kolorowań możemy przyporządkować osobny „kod” – liczbę od 1 do m^P . Zamiast myśleć o kolorowaniu kolejnych liczb, możemy teraz rozważać nadawanie kodów kolejnym blokom P liczb. Nasze „zewnętrzne” założenie indukcyjne pokazuje zatem, że wśród $N(k-1, m^P)$ kolejnych bloków istnieje $k-1$ takich, które mają ten sam kod (więc są identycznie pomalowane) i znajdują się w równych odstępach. Tym samym każdy przedział długości $P \cdot N(k-1, m^P)$ zawiera $k-1$ identycznych wachlarzy stopnia $d-1$ o promieniu k , tworzących ciąg arytmetyczny. Oznaczmy bazę pierwszego wachlarza przez a , a odstęp pomiędzy bazami kolejnych wachlarzy przez s ; $a-s$ stanie się bazą nowego wachlarza. Teraz już widzimy nasze „przekątne”. Niech $a+b_j$ będzie pierwszym punktem pewnej szprychy w pierwszym wachlarzu. Wtedy ciąg arytmetyczny

$$a-s+(s+b_j), \quad a-s+2(s+b_j), \quad \dots, \quad a-s+(k-1)(s+b_j)$$

jest jednobarwny (pierwsza z liczb należy do pierwszego z identycznych wachlarzy, druga do drugiego itd.) i staje się szprychą nowego wachlarza. Takich szprych jest $d-1$, a jeszcze jedną szprychę tworzy po prostu ciąg

$$a-s+s, \quad a-s+2s, \quad \dots, \quad a-s+(k-1)s.$$

Wiemy też, że barwy wszystkich tych szprych są parami różne. Stąd pozostają dwie możliwości: albo liczba $a-s$ ma taki sam kolor jak jedna ze szprych, przez co badany przedział zawiera jednobarwny ciąg arytmetyczny długości k , albo ma kolor od nich wszystkich inny, przez co jest bazą wachlarza polichromatycznego stopnia d o promieniu k .

Do ukończenia kroku indukcyjnego i całego dowodu brakuje jedyne szczególności: należy upewnić się, że $a-s \geq 1$. Zauważmy jednak, że wolno nam dowolnie wybrać badany przedział długości $P \cdot N(k-1, m^P)$. W szczególności możemy zażądać, by zaczynał się od liczby równej $P \cdot N(k-1, m^P)$. Ponieważ a musi należeć do tego przedziału, s musi zaś być mniejsze od jego długości, zapewnia to, że $s < a$, co było do wykazania. $\square$

Dla pokazania zastosowań twierdzenia van der Waerdena i zarazem rozumowań podobnych do jego dowodu rozpatrzmy następujący, uroczy problem:

Twierdzenie 4. *Jeżeli pokolorujemy $\mathbb{N}$ skończoną liczbą barw, będą istnieć dwie liczby tej samej barwy odległe o kwadrat liczby naturalnej.*

Wygląda to zupełnie jak zadanie, które mogłoby pojawić się na olimpiadzie matematycznej (w rzeczywistości, jak się wkrótce przekonamy, nie byłby to

Dowód zaczerpnąłem z artykułu Marka Waltersa *Combinatorial proofs of the polynomial van der Waerden theorem and the polynomial Hales-Jewett theorem* z 2000 roku.

najszczęśliwszy pomysł). Przede wszystkim należy odnotować, że nie jest to prosty wniosek z twierdzenia van der Waerdena. Co prawda istnieją dowolnie długie jednobarwne ciągi arytmetyczne, ale nic nie gwarantuje, że ich postęp będzie mniejszy od ich długości, co może uniemożliwić znalezienie w nich dwóch elementów odległych o kwadrat liczby naturalnej. I chociaż potrzebne techniki nie wykraczają poza to, co widzieliśmy już wyżej, wydaje się, że problem pozostawał otwarty aż do ostatnich lat ubiegłego wieku. Korzystając z wytyczonego już szlaku, wprowadźmy następującą strukturę:

Definicja 2 (Kwachlarz). Kwachlarz stopnia d składa się z bazy $a \in \mathbb{N}$ oraz d różnych jednoelementowych szprych postaci $a + b_j^2$ ($b_j \in \mathbb{N}$, $1 \leq j \leq d$). Kwachlarz jest polichromatyczny, jeżeli jego baza i wszystkie szprychy mają różne kolory.

Główną – naprawdę niemal jedyną – trudnością koncepcyjną w dowodzie jest zorientowanie się, że indukcja może zapewnić polichromatyczność kwachlarza, pomimo że jego szprychy nie muszą być odległe jedna od drugiej o kwadrat liczby naturalnej. Do tego celu wykorzystamy oczywiście twierdzenie van der Waerdena. Podobnie jak poprzednio, dla dowolnie wybranego m możemy przekształcić naszą tezę do następującej postaci:

Twierdzenie 5. Dla każdego $d \geq 0$ istnieje takie $N(m, d) \in \mathbb{N}$, że każde m -kolorowanie $N(m, d)$ kolejnych liczb naturalnych zawiera dwie liczby tego samego koloru odległe o pełny kwadrat albo kwachlarz polichromatyczny stopnia d .

Zastosujemy indukcję ze względu na d . Baza indukcji jest trywialna (dla $d = 0$ kwachlarz staje się pojedynczą liczbą). Ponieważ w zbiorze pomalowanym m kolorami nie może istnieć kwachlarz polichromatyczny stopnia m , wykazanie kroku indukcyjnego wystarczy do udowodnienia całego twierdzenia. Z założenia indukcyjnego możemy więc przyjąć istnienie $N(m, d - 1)$ takiego, że każdy przedział naturalny tej długości zawiera kwachlarz polichromatyczny stopnia $d - 1$ (albo dwie liczby odległe o kwadrat, ale wtedy kończymy krok indukcyjny). Dzięki twierdzeniu van der Waerdena wiemy, że kiedy zbadamy dostatecznie dużo kolejnych przedziałów tej długości, znajdzie się wśród nich $2\lceil\sqrt{N(m, d - 1)}\rceil$ przedziałów identycznie pokolorowanych w identycznych odstępach, a tym samym $2\lceil\sqrt{N(m, d - 1)}\rceil$ kwachlarzy polichromatycznych stopnia $d - 1$ tworzących ciąg arytmetyczny. Jak poprzednio, oznaczmy bazę pierwszego kwachlarza przez a oraz odstęp pomiędzy bazami kolejnych kwachlarzy przez s . Tym razem bazą nowego kwachlarza stanie się $a - s^2$. Niech $a + b_j^2$ będzie dowolną szprychą pierwszego kwachlarza. Wówczas $a - s^2 + (s + b_j)^2 = a + b_j^2 + 2b_j \cdot s$ jest tego samego koloru (należy do jednego z tych identycznych kwachlarzy, jako że $2b_j < 2\lceil\sqrt{N(m, d - 1)}\rceil$) i staje się szprychą nowego kwachlarza. Samo a również staje się szprychą nowego kwachlarza, a kolory wszystkich tych d szprych muszą być parami różne. To pozostawia dwie możliwości – jeżeli liczba $a - s^2$ ma taki sam kolor jak jedna ze szprych, to tworzy parę jednego koloru o odległości będącej pełnym kwadratem, a w przeciwnym razie jest ona bazą kwachlarza polichromatycznego stopnia d . Znów pozostaje tylko upewnić się, że $a > s^2$, a w tym celu, tak jak poprzednio, wystarczy odpowiednio przesunąć początek przedziału, znając już jego długość. To kończy dowód. $\square$

Okazuje się, że przedstawiony problem jest tylko przypadkiem szczególnym znacznie mocniejszego twierdzenia wielomianowego van der Waerdena, które pozwala zastąpić w sformułowaniu tezy skończony ciąg wielomianów liniowych $W_1(n) = n, W_2(n) = 2n, \dots, W_k(n) = kn$ albo pojedynczy wielomian kwadratowy $W(n) = n^2$ – dowolnym skończonym zbiorem wielomianów bez wyrazu wolnego. Jego pierwszy dowód (Bergelson i Leibman, 1996) odwoływał się do teorii ergodycznej. Czytelnik Dociekliwy znajdzie nieco żmudny, ale wykorzystujący podobne do naszych narzędzia, dowód w cytowanej na marginesie pracy Marka Waltersa.

