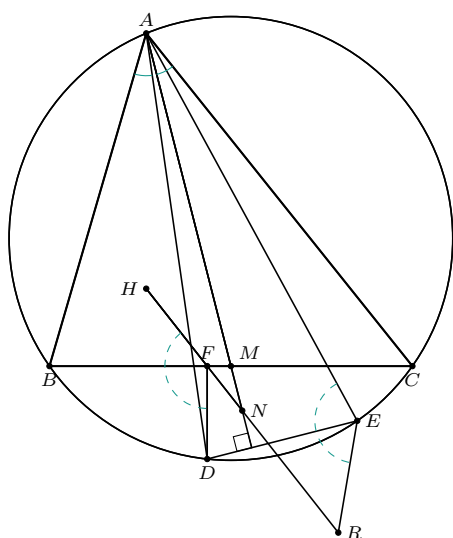


Po hiperboli przez Tajwan

Kazimierz CHOMICZ*

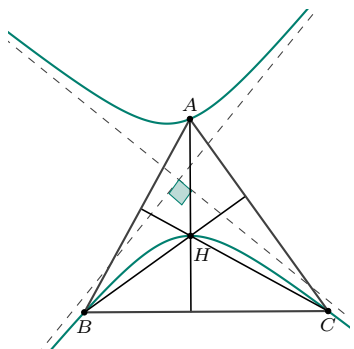
Hiperbolę, której asymptoty przecinają się pod kątem prostym, nazywamy *hiperbolą prostokątną*. Przykładem jest wykres funkcji $f(x) = \frac{1}{x}$ dla niezerowych liczb rzeczywistych x , który to wykres jest dla wielu pierwszą hiperbolą, z jaką stykają się w życiu. W niniejszym artykule pokażę, jak, korzystając z własności hiperboli prostokątnych, rozwiązać poniższe zadanie:

Zadanie (Tajwan TST 2022). Dany jest ostrokątny trójkąt ABC o ortocentrum H oraz okręgu opisanym Ω . Niech M będzie środkiem boku BC . Na krótszym łuku BC okręgu Ω wybieramy taki punkt D , że $\sphericalangle BAD = \sphericalangle MAC$. Niech E będzie takim punktem na Ω , że $DE \perp AM$, zaś F rzutem prostokątnym punktu D na prostą BC . Proste HF i AM przecinają się w N , a R jest odbiciem H względem N . Udowodnij, że $\sphericalangle AER = \sphericalangle HFD$.



Rozpoczniemy od przedstawienia kilku własności hiperboli prostokątnych. Ich uzasadnienie można znaleźć w mojej pracy *Dowód i zastosowania własności hiperboli prostokątnych*, nadesłanej na 46. Konkurs Uczniowskich Prac z Matematyki im. Pawła Domańskiego, dostępnej na stronie deltami.edu.pl.

Twierdzenie 1. *Hiperbola $\mathcal{H}$ opisana na trójkącie ABC (tzn. przechodząca przez wierzchołki trójkąta) jest prostokątna wtedy i tylko wtedy, gdy przechodzi przez ortocentrum H trójkąta ABC .*

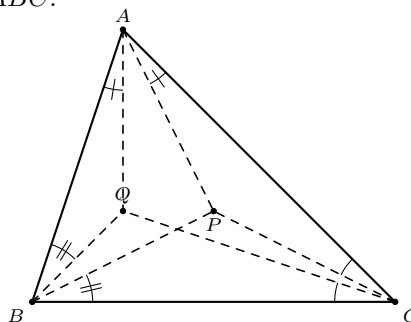


*Uczeń, I LO im. Bolesława Chrobrego w Piotrkowie Trybunalskim
Autor otrzymał brązowy medal i złoty medal na, odpowiednio,
46. i 47. edycji Konkursu Uczniowskich Prac z Matematyki
im. Pawła Domańskiego

Powyższe twierdzenie stanowi podstawową charakterystykę hiperboli prostokątnych.

Ważną będzie też koncepcja izogonalnego sprzężenia w trójkącie.

Definicja. Dany jest trójkąt ABC oraz punkt P leżący poza prostymi zawierającymi boki trójkąta. Wówczas punkt Q spełniający równości $\sphericalangle ABP = \sphericalangle CBQ$, $\sphericalangle BCP = \sphericalangle ACQ$ i $\sphericalangle CAP = \sphericalangle BAQ$ nosi nazwę *izogonalnego sprzężenia* punktu P względem trójkąta ABC .



Istnienie punktu spełniającego opisane w definicji równości nie jest zupełnie oczywiste. Można tego dowiedzieć np. za pomocą trygonometrycznego twierdzenia Cévy. Więcej informacji o izogonalnym sprzężeniu można odnaleźć w Kąciku Początkującego Olimpijczyka z Δ_{26}^2 .

W ramach ćwiczenia polecamy Czytelnikowi sprawdzić, że w dowolnym trójkącie środek okręgu na nim opisanego oraz jego ortocentrum są izogonalnie sprzężone.

Okazuje się, że prawdziwy jest następujący fakt.

Fakt 1. Dany jest trójkąt ABC oraz prosta różna od prostych zawierających boki trójkąta. Dla każdego punktu na prostej bierzemy jego izogonalne sprzężenie względem ABC . Tak otrzymane punkty utworzą krzywą stożkową, opisaną na trójkącie ABC .

Ponieważ izogonalne sprzężenie jest involucją – jego dwukrotne zastosowanie jest identycznością – to nietrudno uzasadnić, że to samo będzie prawdą w drugą stronę: izogonalnym sprzężeniem względem trójkąta ABC opisanej na nim krzywej stożkowej będzie prosta.

W takim przekształceniu izogonalne sprzężenie hiperboli prostokątnej opisanej na ABC będzie prostą przechodzącą przez środek okręgu opisanego na ABC . Idea rozważania izogonalnego sprzężenia hiperboli prostokątnej będzie nam bardzo pomocna. Warto tu zwrócić uwagę na jeszcze jedną kwestię z tym związaną.

Fakt 2. Sprzężenie punktu na okręgu opisanym na ABC jest w nieskończoności i vice versa.

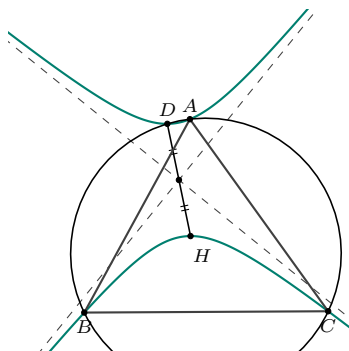
Czytelnik niezaznajomiony z geometrią rzutową może nie wiedzieć, czym jest punkt w nieskończoności. W geometrii rzutowej przyjmujemy, że każda prosta ma (jeden) punkt w nieskończoności. Jeśli dwie proste są równoległe, to uznajemy, że mają ten sam punkt w nieskończoności, i mówimy, że się w nim przecinają.

Dowód tego faktu pozostawiam Czytelnikowi jako ćwiczenie na przenoszenie kątów.

Teraz weźmy trójkąt ABC i prostą l przechodzącą przez środek okręgu opisanego na ABC . Niech l przecina okrąg opisany w punktach P i Q . Wiemy już, że sprzężeniem l względem ABC będzie hiperbola prostokątna. Z faktu 2 wiemy również, że sprzężenia P i Q leżą w nieskończoności. Znaczący to, że punkty P i Q po izogonalnym sprzężeniu przechodzą na punkty w nieskończoności hiperboli będącej obrazem l .

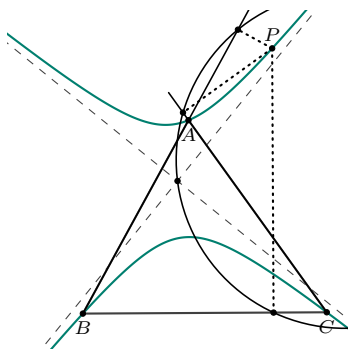
Zbliżamy się do przedstawienia *fundamentalnego twierdzenia hiperboli prostokątnych*, ale przed jego sformulowaniem warto wprowadzić następujący lemat. Tu i dalej przez *środek* hiperboli rozumiemy będziemy punkt przecięcia jej asymptot.

Lemat 1. *Hiperbola prostokątna $\mathcal{H}$, opisana na trójkącie ABC o ortocentrum H , przecina okrąg opisany na ABC po raz czwarty w punkcie D . Wtedy środek odcinka HD jest środkiem $\mathcal{H}$.*



W dalszych rozważaniach będą nam potrzebne jeszcze dwie definicje. Ustalmy trójkąt ABC . Dla dowolnego punktu P jego *okręgiem ortycznym* względem ABC będzie okrąg przechodzący przez rzuty punktu P na proste AB , BC , CA . Okazuje się, że okręgi ortyczne punktu P oraz jego izogonalnego sprzężenia względem trójkąta ABC pokrywają się (por. zadanie 1 w Kąciku Początkującego Olimpijczyka z Δ_{26}^2). Gdy punkt P leży na okręgu opisanym na ABC , jego okrąg ortyczny stanie się prostą – nazywamy ją wtedy *prostą Simsona*.

Twierdzenie 2 (fundamentalne twierdzenie hiperboli prostokątnych). *Niech $\mathcal{H}$ będzie hiperbolą prostokątną opisaną na ABC . Niech $P \in \mathcal{H}$. Wtedy środek $\mathcal{H}$ leży na okręgu ortycznym punktu P względem ABC .*

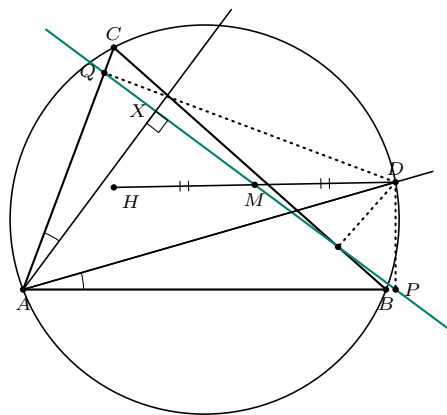


Wniosek. Teza powyższego twierdzenia pozostaje prawdziwa, jeśli punkt P znajduje się na prostej izogonalnie sprzężonej do hiperboli $\mathcal{H}$ w trójkącie ABC .

Warto opisać, w jaki sposób z twierdzenia 2 wprost wynika lemat 1. Aplikując twierdzenie 2 do ortocentrum H trójkąta ABC , dostajemy, że środek $\mathcal{H}$ leży na tzw. *okręgu dziewięciu punktów*. Jedną z własności tego okręgu jest fakt, że jednokładność o skali 2 i środku H przekształca go na okrąg opisany. Dostajemy stąd, że odbicie H względem środka $\mathcal{H}$ – oznaczmy je jako punkt D – leży na okręgu opisanym na ABC . Ponieważ $\mathcal{H}$ jest symetryczna względem swojego środka, D należy do $\mathcal{H}$, więc D to ten sam punkt co w lemacie 1. Lemat 1 został wyszczególniony jako osobny wynik przed twierdzeniem 2, gdyż istnieje jego niezależny dowód i zwykle korzysta się z niego, dowodząc twierdzenie.

Od tego momentu resztę faktów będziemy wnioskować z twierdzeń już do tej pory podanych.

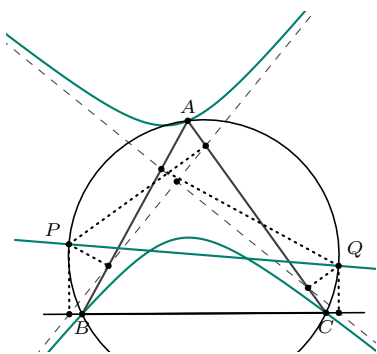
Lemat 2. *Niech D będzie punktem na okręgu opisanym na trójkącie ABC o ortocentrum H . Wtedy prosta Simsona punktu D połowi odcinek HD oraz jest prostopadła do sprzężenia izogonalnego prostej AD w $\sphericalangle A$.*



Dowód. Prostopadłość wynika z krótkiego przeliczenia kątów. Istotnie, niech P i Q będą rzutami punktu D na proste AB i AC i niech X będzie przecięciem prostej PQ i prostej izogonalnej do AD w $\sphericalangle A$. Na czworokącie $APDQ$ można opisać okrąg (ma dwa przeciwległe kąty proste), zatem $\sphericalangle ADP = \sphericalangle AQX$. Trójkąty APD i AXQ są zatem podobne, i w tej sytuacji $\sphericalangle AXQ = \sphericalangle APD = 90^\circ$. Do dowodu pierwszego faktu możemy posłużyć się poznanymi już własnościami hiperboli prostokątnych. Z twierdzenia 1 hiperbola $ABCHD$ jest prostokątna, natomiast jej środkiem, z lematu 1, jest środek HD . Teraz z twierdzenia 2 ów środek musi leżeć na okręgu ortycznym punktu D , czyli na prostej Simsona. $\square$

Kolejne twierdzenie będzie grało kluczową rolę w naszym zadaniu.

Twierdzenie 3. *Dana jest hiperbola prostokątna $\mathcal{H}$ opisana na trójkącie ABC . Niech sprzężenie izogonalne $\mathcal{H}$ przecina okrąg opisany na ABC w punktach P i Q . Wtedy proste Simsona punktów P i Q względem ABC są asymptotami $\mathcal{H}$.*

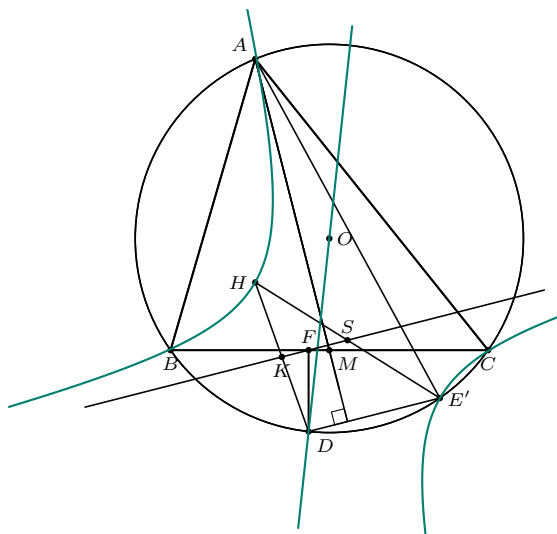


Dowód. Z lematu 2 wynika, że prosta Simsona punktu P jest prostopadła do sprzężenia prostej AP w $\mathcal{A}$, które to, z faktu 2, jest równoległe do jednej z asymptot (bo przechodzą przez ten sam punkt w nieskończoności $\mathcal{H}$). Skoro w hiperboli prostokątnej asymptoty są wzajemnie prostopadłe, to prosta Simsona P musi być równoległa do drugiej asymptoty. Z wniosku z twierdzenia 2 wynika, że prosta Simsona P przechodzi przez środek $\mathcal{H}$, a więc musi być asymptotą. Powtarzamy to samo dla punktu Q . $\square$

Uzbrojeni w odpowiednie narzędzia możemy zaatakować zadanie. Dla wygody przypominamy jego treść:

Dany jest ostrokątny trójkąt ABC o ortocentrum H oraz okręgu opisanym Ω . Niech M będzie środkiem boku BC . Na krótszym łuku BC okręgu Ω wybieramy taki punkt D , że $\sphericalangle BAD = \sphericalangle MAC$. Niech E będzie takim punktem na Ω , że $DE \perp AM$, zaś F rzutem prostokątnym punktu D na prostą BC . Proste HF i AM przecinają się w N , a R jest odbiciem H względem N . Udowodnij, że $\sphericalangle AER = \sphericalangle HFD$.

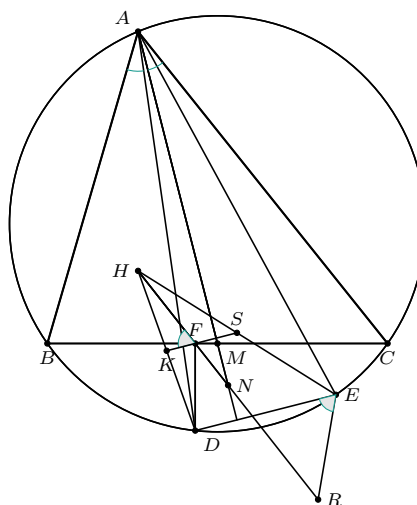
Rozwiązanie zadania. Niech O będzie środkiem Ω . Niech E' będzie przecięciem hiperboli prostokątnej $\mathcal{H}$ z Ω , która jest izogonalnym sprzężeniem prostej OD w ABC .



Udowodnimy, że $E = E'$. Niech S to środek HE' . Z lematu 1 punkt S to również środek $\mathcal{H}$. Z twierdzenia 3 wynika, że prosta FS to prosta Simsona punktu D oraz asymptota $\mathcal{H}$. Z lematu 2 wynika, że FS przechodzi przez środek K odcinka HD oraz jest prostopadła do AM . Skoro S i K , to środki HD i HE' to $KS \parallel DE'$, więc $DE' \perp AM$, a zatem $E = E'$.

Kolejny krok to przekształcenie tezy, poprzez przeliczenie kątów. Będziemy chcieli pozbyć się

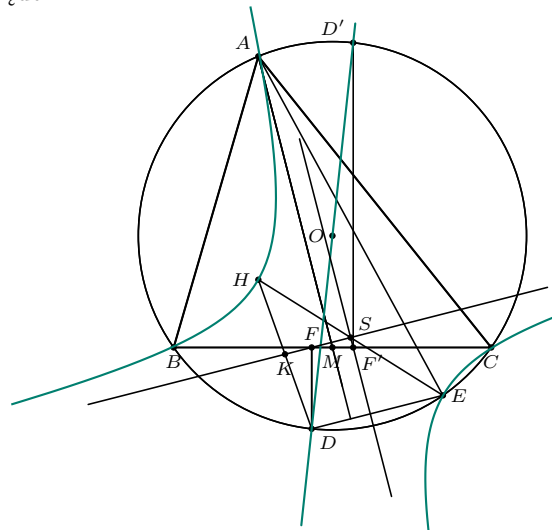
punktów N i R . Zauważmy najpierw, że skoro $AM \perp KF$ oraz $MB \perp FD$, to $\sphericalangle AMB = \sphericalangle KFD$.



W tej sytuacji

$$\begin{aligned} \sphericalangle AER - \sphericalangle DER &= \sphericalangle DEA = \sphericalangle DCA \\ &= 180^\circ - \sphericalangle DAC - \sphericalangle ADC \\ &= 180^\circ - \sphericalangle BAM - \sphericalangle ABC = \sphericalangle BMA \\ &= \sphericalangle KFD = \sphericalangle HFD - \sphericalangle HFK, \end{aligned}$$

więc teza jest równoważna udowodnieniu $\sphericalangle DER = \sphericalangle HFK$, co z równoległości $SN \parallel ER$ (linia środkowa) i $SK \parallel ED$ daje, że wystarczy udowodnić równoramiennność trójkąta FSN . To zaś jest równoważne stwierdzeniu, że F i S są swoim odbiciem względem AM .



Niech D' będzie punktem antypodycznym do D , a F' to rzut D' na BC . Analogicznie jak dla D dostajemy, że prosta $F'S$ to prosta Simsona D' i jednocześnie druga asymptota $\mathcal{H}$. Wynika z tego, że $SF' \parallel AM$, bo asymptoty $\mathcal{H}$ są prostopadłe. Skoro O jest środkiem DD' oraz $OM \perp BC$, to M jest środkiem FF' , co z równoległości $SF' \parallel AM$ daje tezę. $\square$

Mam nadzieję, że przedstawione własności hiperboli prostokątnej, jak również rozwiązane za ich pomocą zadanie, zachęcą Czytelników do dokładniejszego zapoznania się z tym bardzo eleganckim i pożytecznym obiektem geometrycznym.